MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

31. BAND. 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 1. FEBRUAR 1930)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

31. Band.

Inhalt:

4. Heft.

Seite

Rádl, Fr., Über die verallgemeinerte Division der Differentialpolynome 441
Heegner, K., Diophantische Untersuchungen über reduzierbare Abelsche Integrale. Erste Mitteilung 457
Heegner, K., Diophantische Untersuchungen über reduzierbare Abelsche Integrale. Zweite Mitteilung 481
Kowallik, U., Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen Orthogonalfunktionen 498
Ferrar, W. L., Note on a paper by L. Neder 519
Fekete, M., Über die Wertverteilung bei ganzzahligen Polynomen 521
Krull, W., Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. II. 527
Krull, W., Ein Hauptsatz über umkehrbare Ideale 558
Hasse, H., Ein Satz über relativ-Galoissche Zahlkörper und seine Anwendung auf relativ-Abelsche Zahlkörper 559
Hasse, H., Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage 565
Szegö, G., Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie 583
Amirà, B., Maximalbetrag und Maximalglied Dirichletscher Reihen 594

Über die verallgemeinerte Division der Differentialpolynome[1]).

Von

Franz Rádl in Prag.

1. Problemstellung.

Laplace hat bekanntlich die nach ihm benannte partielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung[2])

$$g \ldots \frac{\partial^2 z}{\partial z\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

auf die zweiseitige Folge der Gleichungen

$$(1) \qquad g_{-q} \cdots g_{-1},\ g,\ g_1 \cdots g_p$$

transformiert. Wenn die Folge mit der Gleichung g_p (bzw. g_{-q}) abbricht, ist die Gleichung $g_p(g_{-q})$ mit allen vorhergehenden (folgenden) Gleichungen durch Quadraturen integrierbar.

Darboux[3]) hat die Theorie der Laplaceschen Transformation weiter entwickelt und insbesondere solche Gleichungen g untersucht, deren Folge (1) mit der Gleichung g_p und g_{-q} zugleich, also beiderseitig abbricht.

Der Autor transformierte die gewöhnliche lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung (Exponenten geben hier wie im folgenden die Ordnungen der Ableitungen an)

$$a \ldots a_0\, y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m y = 0$$

ebenfalls auf die zweiseitige Folge der Gleichungen

$$(2) \qquad a_{-q} \cdots a_{-1},\ a,\ a_1 \cdots a_p,$$

[1]) Rádl, Vlastnosti resultantu při dělení mnohočlenů diff., Věšt. kr. sp. n. 1927 (tschechisch).

[2]) Darboux, Surfaces (2. Aufl.) 2, S. 23 sq.

[3]) Ibid.

welche mit der Gleichung a_p (bzw. a_{-q}) abbrechen kann; die Ordnung der Gleichung a_p (a_{-q}) und aller vorhergehenden (folgenden) Gleichungen kann dann durch Quadraturen erniedrigt werden, wodurch der Zweck der Transformation begründet ist.

Man kann auch solche Gleichungen a angeben, deren Folge (2) mit der Gleichung a_p und a_{-q} zugleich, also beiderseitig abbricht.

Auf diese Art hat der Verfasser eine der Laplaceschen Transformation entsprechende Theorie erhalten, die er im folgenden unter dem neuen und einheitlichen Gesichtspunkte der *verallgemeinerten Division der Differentialpolynome* darstellt.

Wir werden zuerst im nächsten Paragraphen die bekannte spezielle Division der Differentialpolynome definieren.

2. Spezielle Division der Differentialpolynome.

Der Begriff der speziellen Division zweier gewöhnlichen Differentialpolynome

$$(3)\quad a(y) = a = a_0 y^m + \ldots + a_m y, \quad b(y) = b = b_0 y^n + \ldots + b_n y, \quad m \geqq n$$

ist bekannt[4]). Da sie als Umkehrung der nichtkommutativen Multiplikation definiert wird, müssen wir zwei Arten der Division unterscheiden.

Das System

$$(4)\quad \begin{gathered} a(y) = p_0 y_1^{m-n} + \ldots + p_{m-n} y_1 + r_0 y^{n-1} + \ldots + r_{n-1} y, \\ y_1 = b_0 y^n + \ldots + b_n y \end{gathered}$$

definiert die *rechtsseitige* Division; die Polynome

$$a(y),\ b(y),\ p(y_1) = p_0 y_1^{m-n} + \ldots + p_{m-n} y_1,\ r(y) = r_0 y^{n-1} + \ldots + r_{n-1} y$$

sind bezüglich Dividend, Divisor, Quotient und Rest, so daß man das System (4) symbolisch schreiben kann

$$(4)^*\quad a = p \times b + r.$$

Die *linksseitige* Division wird dagegen definiert durch das System

$$(5)\quad \begin{gathered} a(y) = b_0 Y^n + \ldots + b_n Y + s_0 y^{n-1} + \ldots + s_{n-1} y_{n-1}, \\ Y = q_0 y^{m-n} + \ldots + q_{m-n} y, \end{gathered}$$

in welchem die Polynome $a(y)$, $b(y)$, $q(y) = q_0 y^{m-n} + \ldots + q_{m-n} y$,

---

[4]) Blumberg, Über die algebr. Eigensch. von lin. hom. Diff.-Ausdrücken, In.-Diss., Göttingen 1912.

E. Noether-Schmeidler, Moduln in nicht kommut. Bereichen, Math. Zeitschr. 8, S. 1–35.

$s(y) = s_0 y^{n-1} + \ldots + s_{n-1} y$ wieder Dividend, Divisor, Quotient und Rest bedeuten; symbolisch kann man schreiben

$$(5)^* \qquad a = b \times q + s.$$

Der Zweck der Abhandlung liegt darin, diese Definitionen der rechts- und linksseitigen Division zu verallgemeinern, wobei sich die Analogie mit der Laplaceschen Transformation zeigen wird. Dazu müssen wir in folgenden fünf Paragraphen vorläufige Untersuchungen vorausschicken.

3. Wechselseitige Transformation von zwei Differentialpolynomen.

Wann immer wir im folgenden von den *Gleichungen* a, b sprechen, so setzen wir immer voraus, daß die Polynome a, b gleich Null gesetzt sind. Wenn die Polynome

$$(6) \qquad \begin{aligned} a_1(y_1) = a_1 &= (a_0)_1 y_1^m + \ldots + (a_m)_1 y_1, \\ b_1(y_1) = b_1 &= (b_0)_1 y_1^n + \ldots + (b_n)_1 y_1 \end{aligned}$$

mit den Polynomen $a(y)$, $b(y)$ so zusammenhängen, daß alle Lösungen der Gleichungen $a_1(y_1)$, $b_1(y_1)$ aus den Lösungen der Gleichungen $a(y)$, $b(y)$ durch die Beziehungen $y_1 = b(y)$, $y_1 = a(y)$ hervorgehen, so sagen wir, daß die Polynome a, b auf die Polynome a_1, b_1 *wechselseitig transformiert* sind[5]).

Um die Voraussetzung zu erhalten, unter welcher diese wechselseitige Transformation möglich ist, bedenken wir, daß die Gleichungen $a_1[b(y)]$, $b_1[a(y)]$ von der $m+n$-ten Ordnung sind und dieselben Lösungen haben. Es gilt daher die Identität

$$(7) \qquad a_1[b(y)] - b_1[a(y)] \equiv 0 \quad \text{oder} \quad a_1 \times b - b_1 \times a \equiv 0,$$

mit deren Hilfe wir die Koeffizienten der Polynome $a_1(y_1)$, $b_1(y_1)$ bestimmen können.

Wenn wir nämlich die linke Seite der Identität (7) nach den z. B. fallenden Ordnungen von y ordnen, so verschwinden alle ihre Koeffizienten, wodurch wir $m+n+1$ Gleichungen bekommen. Die erste von ihnen lautet

$$(8) \qquad (a_0)_1 b_0 - (b_0)_1 a_0 = 0;$$

setzen wir $(a_0)_1 = a_0$, so folgt aus dieser Relation $(b_0)_1 = b_0$. Die übrigen Gleichungen bilden ein System von $m+n$ linearen Gleichungen mit $m+n$ Unbekannten $(a_1)_1 \ldots (a_n)_1$; $(b_1)_1 \ldots (b_n)_1$; *die Determinante dieses Systems*

[5]) Über den sog. Artbegriff s. Schlesinger, Hdb. d. lin. Diff.-Gl. 2, S. 118. — Blumberg, Abh. unter [4]), S. 25.

ist die Resultante der Polynome a, b [6])

$$R = R(a, b) = |a, b| \tag{9}$$

und darf nicht verschwinden, d. h. die Polynome a, b müssen teilerfremd sein, damit die wechselseitige Transformation möglich ist. Haben die Polynome a, b ein gemeinsames Maß, so wäre der Beziehung $y_1 = b(y)$ zufolge wenigstens ein partikulares Integral der transformierten Gleichung a_1 gleich Null, was unmöglich ist, die Gleichung a_1 von der m-ten Ordnung existiert dann nicht; dasselbe gilt von der Gleichung b_1 gemäß der Relation $y_1 = a(y)$.

4. Linksseitige Division des Polynoms a_1 durch das Polynom b_1.

Wir werden das Polynom a_1 durch zwei die linksseitige Division (5) ausdrückende Relationen darstellen. Das Fundamentalsystem partikulärer Integrale der Gleichung b bezeichnen wir zu diesem Zwecke mit β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, und im System (4) setzen wir für $y = \beta_j$; wir erhalten die Beziehung

$$a(\beta_j) = r(\beta_j), \tag{10}$$

welche ausdrückt, daß bei der rechtsseitigen Division die gemeinsame Lösung des Dividenden und des Divisors auch den Rest befriedigt. Zwischen den Lösungen y_1, y der Gleichung b_1, b besteht also nicht nur die Relation $y_1 = a(y)$, sondern auch die inhaltsgleiche Beziehung $y_1 = r(y)$.

Wenn die Polynome b, r durch wechselseitige Transformation die Polynome bzw. b_1, s_1 liefern, so sind die Gleichungen $b_1[r(y)]$, $s_1[b(y)]$ von der $2n-1$-ten Ordnung und der die Identität (7) betreffenden Schlußweise gemäß sind diese Gleichungen identisch. Wir benützen die Bezeichnung s_1 anstatt r_1, wo s_1 ein Polynom

$$s_1(y_1) = s_1 = (s_0)_1 y_1^{n-1} + \ldots + (s_{n-1})_1 y_1$$

bedeutet; weiter unten, bei der Diskussion des Systems (11) werden wir diese Bezeichnung begründen.

Die Identität

$$b_1[r(y)] - s_1[b(y)] \equiv 0 \quad \text{oder} \quad b_1 \times r - s_1 \times b \equiv 0 \tag{11}$$

liefert analog wie die Identität (7) zunächst die Beziehung

$$(b_0)_1 r_0 - (s_0)_1 b_0 = 0, \tag{12}$$

aus welcher wir schließen, weil wir schon $(b_0)_1 = b_0$ gesetzt haben, daß auch $(s_0)_1 = r_0$ ist; die übrigen Koeffizienten der Polynome b_1, s_1 ergeben

---

[6]) Hefter, Über gemeinsame Vielfache lin. Diff.-Ausdrücke, Journ. f. r. und a. Math. **116** (1898). — Blumberg, Abh. unter [4]), S. 21.

sich wie bei (7) aus einem Systeme von linearen Gleichungen, dessen Determinante nicht verschwinden darf, mit anderen Worten, die Polynome b, r müssen teilerfremd sein oder, wegen der Relation (10), die Polynome a, b dürfen kein gemeinsames Maß haben. Die wechselseitige Transformation der Polynome b, r und der Polynome a, b findet also zugleich statt.

Wir werden jetzt das System (4) so umformen, daß es die linksseitige Division des Polynoms a_1 darstellt. In dem Ausdrucke $b_1[a(y)]$ setzen wir für $a(y)$ den Wert, welcher sich aus der ersten Gleichung des Systems (4) ergibt; wir erhalten

$$b_1[a(y)] = b_1[p(y_1) + r(y)] = b_1[p(y_1)] + b_1[r(y)].$$

Aus der zweiten Gleichung des Systems (4) folgt mit Rücksicht auf (11)

$$s_1(y_1) = s_1[b(y)] = b_1[r(y)].$$

Tragen wir diesen Wert in die vorhergehende Beziehung ein, so nimmt sie die Form an

$$b_1[a(y)] = b_1[p(y_1)] + s_1(y_1).$$

Das zweite Glied dieser Beziehung können wir auch in der Gestalt schreiben

$$b_1(y) + s_1(y_1), \qquad y = p(y_1).$$

woraus durch Elimination von y ein Polynom m-ter Ordnung in y_1, also das Polynom $a_1(y_1)$ entsteht; dieselben Relationen, ausführlicher geschrieben, lauten

$$(13)\quad \begin{aligned} a_1(y_1) &= (b_0)_1 y^n + \ldots + (b_n)_1 y + (s_0)_1 y_1^{n-1} + \ldots + (s_{n-1})_1 y_1, \\ y &= p_0 y_1^{m-n} + \ldots + p_{m-n} y_1, \end{aligned}$$

wodurch die linksseitige Division des Polynoms a_1 durch das Polynom b_1 definiert ist.

Weil s_1 der Rest bei der linksseitigen Division ist, führen wir in Übereinstimmung mit (5)* die Bezeichnung s_1 anstatt r_1 ein, wie dies bereits in der Identität (11) geschehen ist.

Die Systeme (4) und (13), in symbolischer Schreibweise geschrieben

$$(14)\qquad a = p \times b + r, \qquad a_1 = b_1 \times p + s_1,$$

enthalten das Ergebnis:

Wenn wir die Polynome a, b wechselseitig auf die Polynome a_1, b_1 transformieren, so gibt a_1 linksseitig durch b_1 dividiert a) denselben Quotient p wie die rechtsseitige Division von a durch b und b) den Rest $s_1 = s_1(y_1)$, wie er aus dem rechtsseitigen Reste $r = r(y)$ der Polynome a, b durch Transformation $y_1 = b(y)$ erhalten wird.

5. Kontragredientes Theorem.

Wir werden beweisen:

Wenn die Polynome a, b durch wechselseitige Transformation in die Polynome a_1, b_1 übergehen und c, d; c_{-1}, d_{-1} bezüglich die adjungierten Polynome sind, so entstehen die Polynome c, d durch wechselseitige Transformation aus den Polynomen c_{-1}, d_{-1}.

Diese Eigenschaft soll das Schema

$$\begin{cases} a, b \rightarrow a_1, b_1 \\ c, d \leftarrow c_{-1}, d_{-1} \end{cases} \tag{15}$$

veranschaulichen. Die Polynome der ersten Zeile sind *kontragredient* zu den Polynomen der zweiten Zeile. Das eben ausgesprochene Theorem begründet die Bezeichnungsweise c_{-1}, d_{-1} mit den negativen Indizes.

Wir wollen das Theorem durch vollständige Induktion beweisen; wir nehmen die Gültigkeit des Theorems für eine beliebige Ordnung m von a und für die $n-1$-te Ordnung von b an und beweisen sodann die Gültigkeit für die n-te Ordnung von b.

Die Polynome a, a_1 schreiben wir in der symbolischen Form (14); wir erhalten aus dieser Gestalt ihre adjungierten Polynome c, c_{-1}, wenn wir die Polynome p, b, r, b_1, s_1 durch ihre adjungierten Polynome p', d, r', d_{-1}, s_1' ersetzen und die Faktoren der symbolischen Multiplikation in der umgekehrten Reihenfolge schreiben[7]), so daß

$$c = d \times p' + r', \qquad c_{-1} = p' \times d_{-1} + s_1'. \tag{16}$$

Wenn wir die Polynome a_1, b_1 aus a, b durch Transformation berechnet haben, so haben wir zu zeigen, daß die Polynome c_{-1}, d_{-1} bei der analogen Transformation c, d geben.

Die Polynome b, r liefern wegen der Identität (11) durch wechselseitige Transformation die Polynome b_1, s_1; weil das Polynom r von der $n-1$-ten Ordnung ist, gilt nach der Voraussetzung das kontragrediente Theorem, wie das folgende Schema veranschaulicht:

$$\begin{aligned} b, r &\rightarrow b_1, s_1 \\ d, r' &\leftarrow d_{-1}, s_1'. \end{aligned}$$

Sind aber die Polynome b_1, s_1 durch Transformation von b, r schon berechnet, so können wir der Relation (14) gemäß aus dem Polynom a oder $p \times b + r$ das Polynom a_1 in der Form $b_1 \times p + s_1$ schreiben.

---

[7]) Schlesinger, Hdb. d. lin. Diff.-Gl., **1**, S. 58.

Gerade so können wir auf Grund der Relation (16) aus dem Polynome c_{-1} oder $p' \times d_{-1} + s_1'$ das Polynom c in der Form $d \times p' + r'$ berechnen, weil wir die Polynome d, r' dem letzten Schema gemäß entweder aus d_{-1}, s_1' durch Transformation oder aus b, r als adjungierte Polynome erhalten können. Das Polynom c kann also ebenfalls entweder als ein adjungiertes aus a oder als ein transformiertes aus c_{-1} entstehen. Wenn also das Theorem für die Polynome b, r oder für die $n-1$-te Ordnung gilt, so gilt es auch für die Polynome a, b oder für die n-te Ordnung. Wenn wir jetzt zeigen werden, daß das Theorem für beliebige Ordnung m und für $n = 0$ richtig ist, so wird es allgemein bewiesen sein.

Aber die Gültigkeit für $n = 0$ liegt auf der Hand. Hat nämlich das Polynom b die Form $b_0 y$, so ist

$$r = s_1 = r' = s_1' = 0, \qquad b = d = b_1 = d_{-1},$$

so daß den Relationen (14), (16) gemäß gilt

$$a \equiv p \times b, \quad a_1 = b \times p; \qquad c = b \times p', \quad c_{-1} = p' \times b,$$

woraus dieselbe Beziehung zwischen a, a_1 und c_{-1}, c ersichtlich ist.

Wenn wir alle partikulären Integrale der Gleichung a_1 kennen, so sind bekanntlich auch die partikulären Lösungen der adjungierten Gleichung c_{-1} und darum auch auf Grund des Schema (15) die partikulären Lösungen der Gleichung c und der Gleichung a bekannt; wir brauchen dabei keine Integrationen durchzuführen. Mit Hilfe der Relation $(\alpha_i)_1 = b(\alpha_i)$ können wir aus jedem partikulären Integral $(\alpha_i)_1$ der Gleichung a_1 die entsprechende Lösung α_i der Gleichung a durch Quadraturen berechnen; man nimmt dabei an, daß wir dabei die Lösungen der Gleichung b kennen.

6. Invarianteneigenschaft der Resultante.

Mit Hilfe des vorhergehenden Paragraphen können wir folgenden Satz beweisen:

Wenn wir die Polynome a, b wechselseitig auf a_1, b_1 transformieren und dann die Polynome a_1, b_1 in ihre adjungierten Polynome c_{-1}, d_{-1} überführen, so ist die Resultante $R(a, b)$ der Polynome a, b identisch mit der Resultante $R(c_{-1}, d_{-1})$ der Polynome c_{-1}, d_{-1}.

Zum Beweise benützen wir für die Resultante (9) den Ausdruck

$$R = R(a, b) = a_0^n \cdot \frac{|b(\alpha)|}{|\alpha|} \quad [8]), \tag{17}$$

[8]) Escherich, Über die Gemeinsamkeit partik. Integrale bei zwei lin. Diff.-Gl., Wien. Ak. **46** (1883).

wobei wir, wenn α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, ein Fundamentalsystem partikulärer Integrale der Gleichung a bedeutet, die Bezeichnung benützen,

$$|b(\alpha)| = |b(\alpha_1),\ b(\alpha_2), \ldots, b(\alpha_m)|, \qquad |\alpha| = |\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m|;$$

auf der rechten Seite dieser Relationen sind die Wrónskischen Determinanten [9]), in welchen nur die erste Zeile ausgeschrieben ist.

Bezeichnen wir das Fundamentalsystem partikulärer Integrale der Gleichung a_1 mit $(\alpha_i)_1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, so gilt mit Rücksicht auf die Beziehung $(\alpha_i)_1 = b(\alpha_i)$ und wegen (17)

$$|(\alpha_1)_1, (\alpha_2)_1, \ldots, (\alpha_m)_1| = |(\alpha)_1| = |b(\alpha)| = \frac{R(a,b)}{a_0^n} \cdot |\alpha|.$$

Partikuläre Integrale der Gleichung c, c_{-1} bezeichnen wir mit γ_i, $(\gamma_i)_{-1}$, die Determinanten der betreffenden Fundamentalsysteme seien $|\gamma|$, $|(\gamma)_{-1}|$; mit diesen Bezeichnungen folgt aus der letzten Formel auf Grund des kontragredienten Theorems eine entsprechende Relation

$$|\gamma| = \frac{R(c_{-1}, d_{-1})}{(a_0)_1^n} \cdot |(\gamma)_{-1}|,$$

wo $(a_0)_1$ nach (6) der erste Koeffizient des Polynoms a_1 ist.

Multiplizieren wir die zwei letzten Relationen kreuzweise, so entsteht die Beziehung

$$R(c_{-1}, d_{-1}) \cdot |(\alpha)_1| \cdot |(\gamma)_{-1}| \cdot \frac{1}{(a_0)_1^n} = R(a,b) \cdot |\alpha| \cdot |\gamma| \cdot \frac{1}{a_0^n}.$$

Zwischen den Determinanten $|\alpha|$, $|\gamma|$ und $|(\alpha_1)|$, $|(\gamma)_{-1}|$ bestehen bekanntlich [10]) die Beziehungen

$$|\alpha| \cdot |\gamma| = \frac{1}{a_0^m}, \qquad |(\alpha)_1| \cdot |(\gamma)_{-1}| = \frac{1}{(a_0)_1^m};$$

wir erhalten also unter der Bedingung, daß die Koeffizienten a_0, $(a_0)_1$ gleich sind, die Invarianteneigenschaft der Resultante in der einfachen Form

$$R(c_{-1}, d_{-1}) = R(a,b). \tag{18}$$

Infolge der Relation (8) können wir einen von den Koeffizienten $(a_0)_1$, $(b_0)_1$ willkürlich wählen und wir haben schon im § 3 am einfachsten $(a_0)_1 = a_0$ gesetzt, woraus auch $(b_0)_1 = b_0$ und der Relation (12) zufolge auch $(s_0)_1 = s_0$ folgt; sonst wären $R(c_{-1}, d_{-1})$ und $R(a,b)$ nur bis auf einen Faktor gleich.

7. Beiderseitige Folge der wechselseitig transformierten Polynome.

Wenn wir die Polynome a, b nach § 3, falls $R(a,b) \neq 0$ ist, auf die Polynome a_1, b_1 wechselseitig transformieren, so können wir nach demselben

[9]) Kowalewski, Determinantentheorie, § 136.
[10]) Darboux, Surfaces (2. Aufl.) 2, S. 117.

Vorgang die Polynome a_1, b_1 unter der Voraussetzung $R(a_1, b_1) \neq 0$ auf die Polynome a_2, b_2 usw. transformieren und so bis zu den Polynomen a_p, b_p fortfahren, vorausgesetzt, daß $R(a_2, b_2) \neq 0 \ldots R(a_{p-1}, b_{p-1}) \neq 0$ sind. Wir gelangen zu der Folge der Polynome

$$(19) \qquad a b,\ a_1 b_1,\ \ldots,\ a_p q_p.$$

Indem wir die Polynome $a, a_1, \ldots, a_p$ als Gleichungen auffassen, haben wir so die Folge (2) mit den positiven Indizes entwickelt.

Ebenso wie wir von den Polynomen a, b zu den Polynomen a_1, b_1 gelangt sind, können wir auch die Polynome a_{-1}, b_{-1} bilden, aus welchen wir durch wechselseitige Transformation die Polynome a, b bekommen. Sind nämlich die Polynome a_1, b_1 aus a, b berechnet worden, so können wir ihre adjungierten Polynome c_{-1}, d_{-1} bilden und diese wechselseitig auf c, d transformieren; dem Theoreme des § 6 gemäß ist diese Transformation zugleich mit der Transformation von a, b auf a_1, b_1 möglich, weil die Resultanten $R(a, b)$, $R(c_{-1}, d_{-1})$ zugleich von Null verschieden sind. Von den Polynomen c, d bekommen wir ihre adjungierten Polynome a, b.

Wenn etwa die Polynome a, b gegeben sind, bestimmen wir zu ihnen eindeutig die Polynome a_{-1}, b_{-1}, indem wir zuerst die adjungierten Polynome c, d, dann zu ihnen die wechselseitig transformierten Polynome c_1, d_1 unter der Voraussetzung $R(c, d) \neq 0$ und endlich die adjungierten Polynome a_{-1}, b_{-1} berechnen. Es existiert dann auch die wechselseitige Transformation von a_{-1}, b_{-1} auf a, b.

Aus den Polynomen a_{-1}, b_{-1} können wir in entsprechender Weise die Polynomen $a_{-2}, b_{-2}, \ldots, a_{-q}, b_{-q}$ bilden, wenn $R(c_1, d_1) \neq 0 \ldots R(c_{q-1}, d_{q-1}) \neq 0$ sind. Die Folge (19) schreitet dann auch linksseitig oder nach negativen Indizes fort:

$$(19^*) \qquad a_{-q} b_{-q}, \ldots, a_{-1} b_{-1},\ a b.$$

Wenn wir die Polynome $a, a_{-1}, \ldots, a_{-q}$ als die Gleichungen nehmen, so haben wir hiermit die Folge (2) auch für die negativen Indizes entwickelt.

Wenn wir die Folge der Polynome sowohl für positive wie auch für negative Indizes ausschreiben und auch die beiderseitige Folge der adjungierten Polynome hinzufügen, so bekommen wir das Schema

$$(20) \qquad \begin{cases} a_{-q} b_{-q} \ldots \rightarrow a_{-1} b_{-1} \rightarrow a b \rightarrow a_1 b_1 \rightarrow \ldots\ a_p b_p, \\ c_q d_q \quad \ldots \leftarrow c_1 d_1 \leftarrow c d \leftarrow c_{-1} d_{-1} \leftarrow \ldots\ c_{-p} d_{-p}, \end{cases}$$

in dem die Polynome $a_p b_p$ bzw. $c_{-p} d_{-p}$ zueinander adjungiert sind. Die Analogie mit der zweiseitigen Folge (1) der Gleichungen, die Laplace entwickelt hat, liegt auf der Hand.

8. Rechtsseitige Division mit dem Index p.

Auf Grund der vorhergehenden fünf Paragraphen können wir den Begriff der rechtsseitigen Division der Polynome a, b, wie sie durch das System (4) definiert wurde, folgendermaßen verallgemeinern:

Wir transformieren die Polynome a, b wechselseitig nacheinander auf die Polynome $a_1, b_1 \dots a_p, b_p$ unter der Voraussetzung $R(a, b) \neq 0$, $R(a_1, b_1) \neq 0, \dots, R(a_{p-1}, b_{p-1}) \neq 0$; wenn wir dann das Polynom a_p durch das Polynom b_p rechtsseitig im Sinne von (4) dividieren, so haben wir das Polynom a durch das Polynom b rechtsseitig mit dem Index p dividiert.

Der Zweck dieses Vorganges liegt darin, daß wir das Verschwinden der Resultante $R(a_p, b_p)$ erreichen. Dann kann die Folge (20) oder die verallgemeinerte rechtsseitige Division nicht mehr zu höheren Indizes als p fortschreiten, worauf wir gerade hinzielen.

Die Polynome r_p, b_p, also auch die Polynome a_p, b_p haben dann ein gemeinsames Maß, wir sagen: *die Polynome a, b haben ein gemeinsames Maß mit dem Index p.* Wir können dann die Lösung der Gleichung a_p von der m-ten Ordnung auf die Lösung einer anderen Gleichung höchstens $m-1$-ter Ordnung zurückführen. Nach dem letzten Absatz im § 5 schließen wir dann auf die Lösung der Gleichung a_{p-1}, also auch $a_{p-2} \dots a$.

Wenn die Gleichung b_p alle ihre Lösungen mit der Gleichung. a_p gemeinsam hat, so verschwinden alle Koeffizienten des Polynoms r_p; wir sagen dann, daß der Rest r_p gleich Null ist, das Polynom a ist durch das Polynom b *teilbar*, und zwar *rechtsseitig mit dem Index p*. Die Wichtigkeit dieser Eigenschaft für die Lösung der Gleichungen $a_p, a_{p-1}, \dots, a$ ist jetzt einleuchtend.

Es kann auch der Fall eintreten, daß die Polynome a_p, b_p mit den Polynomen a, b identisch sind; dann sind auch die Polynome $a_{2p}, b_{2p} \dots a_{ip}, b_{ip}$ gleich den Polynomen bzw. a, b, die verallgemeinerte Division ist *periodisch mit der Periode p.*

Falls bei beliebig großem p die Resultante $R(a_p, b_p)$ niemals verschwindet, sind die Polynome a, b zueinander *prim rechtsseitig für jeden Index p.*

Es sei ausdrücklich betont, daß es zwecklos ist, das Polynom a_p linksseitig durch das Polynom b_p im Sinne von (5) zu dividieren; denn der linksseitige Rest s_p dieser Polynome kann niemals verschwinden, weil sonst den Formeln (16) zufolge dasselbe von dem rechtsseitigen Rest der adjungierten Polynome c_{-p}, d_{-p} gelten müßte, was der Voraussetzung $R(a_{p-1}, b_{p-1}) = R(c_{-p}, d_{-p}) \neq 0$ widerspricht. Die Polynome c_{-p}, d_{-p} können nicht einmal ein gemeinsames Maß haben.

9. Linksseitige Division mit dem Index $-q$.

Die Definition der verallgemeinerten linksseitigen Division der Polynome a, b, welche speziell durch das System (5) definiert wurde, ist jetzt klar:

Zu den Polynomen a, b bestimmen wir die Polynome $a_{-1}, b_{-1} \ldots a_{-q}, b_{-q}$ unter der Voraussetzung $R(c, d) \neq 0 \ldots R(c_{q-1} d_{q-1}) \neq 0$ so, daß die Polynome mit dem höheren Index aus den Polynomen mit niedrigerem Index durch wechselseitige Transformation entstehen; wenn wir dann das Polynom a_{-q} durch das Polynom b_{-q} linksseitig nach (5) dividieren, so haben wir das Polynom a durch das Polynom b linksseitig mit dem Index $-q$ dividiert.

Wir gelangen zu den Polynomen a_{-q}, b_{-q} von den Polynomen a, b dem Schema (20) gemäß nur über die adjungierten Polynome $c, d \ldots c_q, d_q$. Das Ziel des ganzen Verfahrens ist erreicht, wenn die Resultante $R(c_q, d_q)$ verschwindet. Man kann darum auch sagen, daß wir die Polynome a, b linksseitig mit dem Index $-q$ dividieren, wenn wir ihre adjungierten Polynome c, d rechtsseitig mit dem Index $+q$ dividieren.

Zwei Polynome a, b haben deswegen ein linksseitiges gemeinsames Maß (bzw. sind linksseitig teilbar) mit dem Index $-q$, wenn die Polynome c, d ein rechtsseitiges gemeinsames Maß mit dem Index $+q$ haben (bzw. rechtsseitig teilbar mit dem Index $+q$ sind). Wann die Polynome a, b linksseitig teilerfremd für jeden Index $-q$ und wann die linksseitige Division periodisch ist, ist jetzt einleuchtend.

Es ist auch klar, daß es keinen Zweck hat, das Polynom a_{-q} rechtsseitig durch das Polynom b_{-q} nach (4) zu dividieren.

Wenn die Resultanten $R(a_p, b_p)$, $R(c_q, d_q)$ zugleich verschwinden, haben die Polynome a, b *ein zweifaches gemeinsames Maß*, und zwar ein rechtsseitiges mit dem Index p und ein linksseitiges mit dem Index $-q$.

Wenn dabei die Reste r_p, s_{-q} zugleich verschwinden, so ist das Polynom a durch das Polynom b *beiderseitig teilbar* und zwar mit den Indizes $p, -q$.

Ist die Division der Polynome a, b periodisch mit der Periode z. B. p, so ist sie auch *periodisch beiderseitig* und zwar mit derselben (absoluten) Periode.

Es ist einleuchtend, daß die Polynome a, b auch zueinander *beiderseitig prim* für beliebig hohe Indizes sein können.

Wir erkennen jetzt deutlich, wie die spezielle Division, wie sie im § 2 durch die Systeme (4) und (5) definiert wurde, in den §§ 8 und 9 verallgemeinert wurde. Die Systeme (4) und (5) definieren hiernach die Division der Polynome a, b beiderseitig mit demselben Index Null.

10. Ein Beispiel der einseitig und beiderseitig teilbaren Polynome.

Um zu zeigen, wie die vorhergehende allgemeine Theorie zu einfachen Formeln für die im allgemeinen Sinne teilbaren Polynome führt, setzen wir $n=1$ voraus. Es seien also die Polynome a, b bzw. von m-ter und 1-ter Ordnung gegeben

$$(3)^* \qquad a(y)=a_0 y^m+\ldots+a_m y, \qquad b(y)=b_0 y'+b_1 y;$$

die Systeme (4), (5) lauten dann

$$(4)^{**} \qquad a(y)=p_0 y_1^{m-1}+\ldots+p_{m-1}y_1+ry, \qquad y_1=b_0 y'+b_1 y,$$

$$(5)^{**} \qquad a(y)=b_0 Y'+b_1 Y+sy, \qquad Y=q_0 y^{m-1}+\ldots+q_{m-1}y.$$

Wir wollen jetzt die Ausdrücke für die Koeffizienten r, s berechnen. Zu diesem Zwecke setzen wir in der ersten Relation des Systems $(4)^{**}$ für y die Lösung β des Divisors $b(y)$ ein; weil dann nach der zweiten Beziehung $y_1=0$ ist, erhalten wir, wenn der Wert δ durch die Beziehung $\beta\delta=\frac{1}{b_0}$ bestimmt ist, für den Koeffizienten r den Ausdruck

$$(21) \qquad \frac{r}{b_0}=\delta a(\beta).$$

Um den Wert des Koeffizienten s zu bekommen, schreiben wir die erste Relation des Systems $(5)^{**}$ in der Form

$$a(y)=b_0\left(Y'+\frac{b_1}{b_0}Y+\frac{s}{b_0}y\right).$$

Wenn wir jetzt für Y den Wert aus der zweiten Relation von $(5)^{**}$ eintragen, so bekommen wir durch Vergleichung der Koeffizienten auf beiden Seiten $m+1$ Beziehungen

$$b_0 q_0=a_0, \quad b_0\left(q_i'+\frac{b_1}{b_0}q_i+q_{i+1}\right)=a_{i+1} \quad (i=0,1,\ldots,m-2),$$

$$b_0\left(q_{m-1}'+\frac{b_1}{b_0}q_{m-1}+\frac{s}{b_0}\right)=a_m,$$

aus welchen wir nacheinander schließen

$$q_0=\frac{a_0}{b_0}, \quad q_1=-\beta[(a_0\delta)'-a_1\delta], \quad q_2=\beta[(a_0\delta)''-(a_1\delta)'+a_1\delta],$$

so daß wir vermuten können

$$q_{m-1}=(-1)^{m-1}\beta[(a_0\delta)^{m-1}-(a_1\delta)^{m-2}+\ldots+(-1)^{m-1}a_{m-1}\delta];$$

durch den Schluß von $m-1$ auf m kann man dieses Gesetz beweisen, so daß gilt

$$\frac{s}{b_0}=(-1)^m\beta[(a_0\delta)^m-(a_1\delta)^{m-1}+\ldots+(-1)^m a_m\delta].$$

Die rechte Seite definiert, wenn wir den Wert β auslassen, selbständig ein zu $a(y)$ adjungiertes Polynom, welches wir mit $c(y)$ bezeichnet haben. Wir sehen, daß der Begriff des adjungierten Polynoms in der Existenz der zweifachen Division oder, was dasselbe ist, in der Nichtkommutativität der Differential-Multiplikation seinen Grund hat. Der Wert δ ist die Lösung der zu $b(y)$ adjungierten Gleichung $d(y)$. Es gilt also

$$\frac{s}{b_0} = \beta c(\delta). \tag{22}$$

Von den Koeffizienten r', s' der adjungierten Polynome c, d gilt mit Rücksicht auf die Relationen (16)

$$r' = s, \qquad s' = r;$$

wenn wir die Definition des adjungierten Polynoms als bekannt voraussetzen, so folgt die Formel (22) aus der Formel (21) auf Grund der Beziehung $s = r'$.

Das System (4)** kann man in der Form schreiben

$$b_0 y' + b_1 y + y_1, \qquad ry = p_0 y_1^{m-1} + \ldots + p_{m-1} y_1;$$

wenn wir in der zweiten Relation anstatt ry den Wert y schreiben, so haben wir in der ersten Relation den Wert $\frac{y}{r}$ anstatt y einzusetzen; wir multiplizieren noch die erste Relation mit r und erhalten so für das Polynom a_1 im Einklang mit (13) das System

$$(13)^* \quad a_1(y_1) = b_0 y' + \left(b_1 - b_0 \frac{r'}{r}\right) y + r y_1, \quad y = p_0 y_1^{m-1} + \ldots + p_{m-1} y_1,$$

aus welchem folgt, daß

$$s_1 = r, \tag{23}$$

wie wir allgemein aus der Relation (12) schon geschlossen haben.

Aus der ersten Beziehung in (5)** bekommen wir für den Wert Y den Ausdruck

$$Y = \beta \int \frac{1}{\beta} \left[\frac{a(y)}{b_0} - \frac{sy}{b_0}\right] dx;$$

setzen wir für y den Wert β ein, so erhalten wir, wenn wir die Formeln (21) und (22) beachten, die bekannte Lagrangesche Relation [11])

$$\frac{1}{b_0}(r - s) = \delta a(\beta) - \beta c(\delta) = \left(\frac{\beta^{m-1} + \ldots + q_{m-1}\beta}{\beta}\right)', \tag{24}$$

welche nach dieser Methode rascher erhalten wurde als auf dem üblichen Wege.

---

[11]) Darboux, Surfaces (2. Aufl.) 2, S. 113, Formel (7).

Der Einfachheit halber setzen wir im folgenden im besonderen $m = 2$ und außerdem $a_0 = b_0 = 1$ voraus; dann sind die Koeffizienten r, s mit den Resultanten $R(a, b)$, $R(c, d)$ identisch und wir werden sie kurz *Reste* nennen. Wenn wir für diesen Fall im System $(5)^{**}$ den Wert Y eliminieren, so finden wir für den Koeffizienten q den Ausdruck, wobei α_1, α_2 unabhängige partikuläre Lösungen der Gleichung $a(y)$ sind,

$$q = \frac{\beta'}{\beta} - \frac{|\alpha|'}{|\alpha|}, \qquad |\alpha| = |\alpha_1, \alpha_2|.$$

Mit Rücksicht auf diesen Wert lautet die Relation (24), wenn sie für die Polynome a_{p+1}, b_{p+1} ausgeschrieben und die Beziehung (23) berücksichtigt wird,

$$(25) \qquad r_{p+1} - r_p = \left[2\frac{\beta'_{p+1}}{\beta_{p+1}} - \frac{|(\alpha)_{p+1}|'}{|(\alpha)_{p+1}|}\right]' = \frac{d^2 l}{dx^2}\lambda_{p+1}, \qquad \lambda_{p+1} = \frac{\beta^2}{|(\alpha)_{p+1}|}$$

Wir können jetzt den Satz beweisen ($r_0 = r$, $s_0 = s$):

Wenn bei der verallgemeinerten Division des Polynoms

$$a(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y$$

durch das Polynom $b(y) = y' + by$ *der linksseitige Rest* s_0 *verschwindet, so ist der rechtsseitige Rest* r_p *durch die Formel ausgedrückt*[12])

$$(26) \qquad r_p = \frac{A_{p+1} A_{p-1}}{A_p^2} = \left(\frac{B_p}{A_p}\right)',$$

$$(27) \quad A_p = |\lambda, \lambda', \ldots, \lambda^p|, \qquad B_p = |\lambda, \lambda', \ldots, \lambda^{p-2}, \lambda^{p-1}, \lambda^{p+1}|, \qquad \lambda = \frac{\beta^2}{|\alpha|},$$

wo die Wrónskischen Determinanten A_p, B_p wie im § 6 bezeichnet werden.

Dieser Satz kann für eine beliebige Ordnung m des Polynoms a, ja auch für eine beliebige Ordnung n des Polynoms b verallgemeinert werden die Deduktionen sind aber weitläufig.

Man könnte den Satz auch so formulieren, daß, wenn der Rest s_{-p} (bzw. r_p) verschwindet, für den Rest r_0 (bzw. s_0) der Polynome a, b das Gesetz (26) gilt. Weil

$$\beta = e^{-\int b\,dx}, \qquad |\alpha| = e^{-\int a\,dx}$$

ist, kann man dann in den Ausdruck (26) für r_0 (bzw. s_0) anstatt λ die Koeffizienten der Polynome a_{-p}, b_{-p} (bzw. a_p, b_p) einführen. Diesen Rest r_0 (bzw. s_0) können wir aber aus dem System $(4)^{**}$ (bzw. $(5)^{**}$) unmittelbar berechnen und durch die Koeffizienten der Polynome a, b ausdrücken. Die Formel (26) gibt dann ein Kriterium an, allerdings nur ein theoretisches, unter welchem ein gewisses Polynom a durch ein anderes Polynom b

[12]) Vgl. Darboux, Surfaces (2. Aufl.) 2, S. 136 sq.

einseitig (entweder rechts- oder linksseitig) mit einem gewissen Index teilbar ist, so daß die Gleichung a durch Quadraturen integriert werden kann.

Zum Beweis des Satzes setzen wir die Formel (26) für den Index p voraus und wir werden ihre Gültigkeit auch für den Index $p+1$ beweisen.

Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst die Formel

$$\lambda_{p+1} = \frac{A_{p+1}}{A_p} \tag{28}$$

begründen. Es gilt nämlich mit Rücksicht auf den Wert $\delta a(\beta)$ für r_0 die Relation

$$\beta_{p+1} = a_p(\beta_p) = \delta_p \cdot a_p(\beta_p) \cdot \beta_p = r_p \cdot \beta_p;$$

mit Benützung der Formel (17) und der evidenten Relation $R(a, b) = r$ erhalten wir

$$|(\alpha)_{p+1}| = |b_p(\alpha_p)| = \frac{b_p(\alpha_p)}{|(\alpha)_p|} \cdot |(\alpha)_p| = r_p |(\alpha)_p|.$$

Nach der letzten Formel in (27) können wir darum schreiben

$$\lambda_{p+1} = \frac{(\beta)_{p+1}^2}{|(\alpha)_{p+1}|} = r_p \cdot \lambda_p.$$

Setzen wir in diese Beziehung nacheinander die Werte $r_0, r_1, \ldots, r_p$ nach der Formel (26) ein, so bekommen wir die Werte für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ in Übereinstimmung mit der Formel (28).

Wir tragen jetzt in die Relation (25) den vorausgesetzten Wert für r_p und den gesuchten Wert für r_{p+1} ein; dann haben wir

$$\frac{A_{p+2} A_p}{A_{p+1}^2} - \frac{A_{p+1} A_{p-1}}{A_p^2} = \frac{d^2 l}{dx^2} \frac{A_{p+1}}{A_p}.$$

Beide Seiten lassen sich integrieren; nach einem bekannten Determinantensatze[13]) gilt nämlich

$$A_{p+1} A_{p-1} = B_p' A_p - B_p A_p',$$

so daß

$$\frac{A_{p+1} A_{p-1}}{A_p^2} = \left(\frac{B_p}{A_p}\right)';$$

es ist also zugleich der zweite Teil der Formel (26) begründet.

Durch Integration erhalten wir die Identität

$$\frac{B_{p+1}}{A_{p+1}} - \frac{B_p}{A_p} = \frac{A_{p+1}'}{A_{p+1}} - \frac{A_p'}{A_p},$$

womit die Formel (26) für den Index $p+1$ bewiesen ist.

[13]) Fricke, Algebra **1**, S. 68, Formel (7).

Mit Rücksicht darauf, daß die Reste r_{-1} und s_0 der Beziehung (23) gemäß identisch sind und daß der Rest s_0 infolge der vorausgesetzten linksseitigen Teilbarkeit des Polynoms a durch das Polynom b verschwindet, können wir aus der Beziehung (25) den Rest r_0 unmittelbar berechnen; wenn wir für $p = 0$ einsetzen, haben wir

$$r_0 = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)' = \frac{\lambda''\lambda - \lambda'^2}{\lambda^2}$$

im Einklang mit (26) und (27).

Die Formeln (26), (27) gelten darum für jeden Index p.

Wir können jetzt auch ein Kriterium und zwar diesmal ein brauchbares für beiderseitige Teilbarkeit bekommen. Wenn nämlich außer der Voraussetzung $s_0 = 0$ auch die Bedingungen $r_0 \neq 0$, $r_1 \neq 0, \ldots, r_{p+1} \neq 0$, $r_p = 0$ gelten, so ist der Formel (26) gemäß $A_0 \neq 0$, $A_1 \neq 0, \ldots, A_p \neq 0$, $A_{p+1} = 0$; das bedeutet aber, daß der Wert λ einer linearen Differentialgleichung $p+1$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten[14])

$$\cdot\lambda^{p+1} + \cdot\lambda^p + \ldots + \cdot\lambda = 0$$

(Punkte bedeuten Koeffizienten), aber keiner ebensolchen Gleichung niedrigerer Ordnung genügt. Man kann also die Koeffizienten solcher Polynome a, b berechnen, von denen das Polynom a durch das Polynom b zweifach teilbar und zwar für einen gegebenen Index rechts- und für einen anders bestimmten Index linksseitig teilbar ist. Die Anzahl solcher Polynome ist unbeschränkt. Die Gleichung a kann dann auf zweifache Art durch Quadraturen integriert werden.

---

[14]) Kowalewski, Determinantentheorie, § 136.

(Eingegangen am 18. Februar 1928.)

Diophantische Untersuchungen über reduzierbare Abelsche Integrale.

Erste Mitteilung.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Enthält ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $p = 2$ ein auf ein elliptisches Integral reduzierbares Integral erster Gattung, so existiert noch ein zweites Integral von dieser Eigenschaft[1]). Das Periodenschema dieser beiden reduzierbaren Integrale ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \tau_1 & 1 \\ 0 & n & 1 & \tau_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

und zwar bedeutet n eine ganze positive Zahl, welche den Grad der rationalen reduzierenden Funktionen angibt, während τ_1 und τ_2 die Moduln der beiden elliptischen Integrale darstellen. Die unimodularen Transformationen, welche das Periodenschema (1) in ein Schema von derselben Art überführen, sind von Bolza berechnet worden[2]). Die elliptischen Moduln erfahren bei diesen Transformationen unimodulare Substitutionen, welche jedoch nicht voneinander unabhängig sind. Das Resultat Bolzas läßt sich wie folgt formulieren:

Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ ganze Zahlen, unter denen die Relationen

$$\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 = 1, \quad \alpha_2 \delta_2 - \beta_2 \gamma_2 = 1 \tag{2}$$

und modulo n die Kongruenzen

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2, \quad \beta_1 \equiv \beta_2, \quad \gamma_1 \equiv \gamma_2, \quad \delta_1 \equiv \delta_2 \pmod{n} \tag{3}$$

---

[1]) É. Picard, Bull. S. M. F. **11** (1882), S. 47; vgl. auch Krazer, Thetafunktionen, 11. Kap., 1903.

[2]) Bolza, Inaug.-Diss., Göttingen 1886.

bestehen, so sind die Substitutionen der Moduln τ_1 und τ_2 gegeben durch

$$\tau_1' = \frac{\alpha_1 \tau_1 + \beta_1}{\gamma_1 \tau_1 + \delta_1}, \qquad \tau_2' = \frac{\delta_2 \tau_2 + \gamma_2}{\beta_2 \tau_2 + \alpha_2}. \tag{4}$$

Wird die zweite Substitution durch $-\tau_2^{-1}$ transformiert, so erhält sie die Gestalt

$$\tau_2' = \frac{\alpha_2 \tau_2 - \beta_2}{-\gamma_2 \tau_2 + \delta_2}. \tag{5}$$

Es entsprechen nunmehr modulo n den Substitutionen $\tau_1 + 1$ und $-\tau_1^{-1}$ die Substitutionen $\tau_2 - 1$ und $-\tau_2^{-1}$. Diese Zuordnung der Modulsubstitutionen stellt eine holoedrisch isomorphe Beziehung der Galoisschen Gruppe der Modulargleichung auf sich selbst dar. Eine für die folgende Untersuchung zur Verwendung gelangende Modularresolvente ist die Teilungsgleichung, welche sich aus der n-Teilung der Perioden eines erststufigen elliptischen Integrals erster Gattung ergibt. Die algebraische Deutung der durch (4) gegebenen Zuordnung der Substitutionen ist folgende:

Die algebraischen Invarianten der beiden elliptischen Integrale, die Koeffizienten der beiden reduzierenden rationalen Funktionen als auch die Koeffizienten des Polynoms sechsten Grades, durch welches das algebraische Gebilde $p = 2$ definiert ist, lassen sich rational ausdrücken durch drei Parameter a, b, c, unter denen eine algebraische Gleichung

$$f(a, b, c) = 0 \tag{6}$$

besteht. Adjungiert man diese Gleichung dem Rationalitätsbereich der Parameter a, b, c, so erzeugen die n-ten Teilungsgleichungen der beiden elliptischen Integrale denselben algebraischen Körper. Eine independente Definition der Beziehung (6) wird erhalten, wenn wir von der Aufgabe ausgehen, zwei Teilungsgleichungen zu finden, welche denselben algebraischen Körper erzeugen. Diese Aufgabe besitzt mehrere Lösungssysteme, je nach der Anzahl der nicht gleichberechtigten Zuordnungen der Galoisschen Gruppe der Teilungsgleichung auf sich selbst. Jedes dieser Lösungssysteme führt auf eine bestimmte diophantische Gleichung (6), und es bleibt übrig, das für die oben gegebene Zuordnung geltende Lösungssystem zu bestimmen.

Die Aufgabe, zwei Teilungsgleichungen von derselben Irrationalität zu finden, auf die wir geführt wurden, ist grundlegend für die Theorie der algebraischen Gebilde, welche mehrere reduzierbare Integrale enthalten. Betrachten wir ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $p = 3$, welches zwei voneinander unabhängige, auf elliptische Integrale reduzierbare Integrale enthält, so ist noch ein drittes reduzierbares Integral vorhanden, und die genannte Aufgabe findet Anwendung, wenn die Reduktionsgrade der drei Integrale keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Der Fall dreier voneinander unabhängiger reduzierbarer Integrale mit dem gleichen Reduk-

tionsgrad wird in einer späteren Mitteilung erörtert werden. In den Anwendungen ist der Fall $p = 3$ schon deshalb heranzuziehen, weil bei diesen Gebilden nicht nur das durch (4) gekennzeichnete Lösungssystem auftritt. In den Fällen $p > 3$ treten in dem Problem der Koeffizientenbestimmung außer der diophantischen Beziehung, welche durch die Eigenschaften der transzendenten Moduln definiert ist, noch Nebenbedingungen auf, da die Anzahl der algebraischen Moduln geringer ist als die der transzendenten Moduln.

Die vorliegende erste Mitteilung behandelt die niedersten Stufen $n = 2, 3, 4, 5$, für welche die Galoisschen Moduln vom Geschlechte Null sind. Für den Fall $p = 2$ ziehen wir sogleich die bemerkenswerte Folgerung, daß bei den Reduktionsgraden $n = 2, 3, 4, 5$ eine Beziehung (6) nicht benötigt wird, da als der erste Parameter die absolute Invariante des einen elliptischen Integrals gewählt werden kann und alle Größen durch einen zweiten Parameter, welcher dem Galoisschen Hauptmodul entspricht, sich rational ausdrücken lassen. Die Aufstellung der Cremonatransformation, welche diese Parameter in die Parameter der Reduktionsformeln überführt, ist eine wesentliche Aufgabe des Untersuchungsplanes, welche ich bereits vollständig durchgeführt habe.

a) Einleitende Bemerkungen.

Die vorgelegte Aufgabe, zwei gleichartige Modularresolventen zu finden, welche denselben algebraischen Körper definieren, wird durch Tschirnhaustransformation gelöst. In der älteren Literatur ist diese Aufgabe nur für die Galoisschen Moduln durchgeführt[3]). Bei der Anwendung auf reduzierbare Integrale ist eine solche Resolvente zu wählen, welche nicht nur auf eine einfache Tschirnhaustransformation führt, sondern auch in einfacher Beziehung zu dem Verzweigungspolynom vierten Grades der elliptischen Funktionen steht. Für die 2-, 3-, 4-te Stufe genügt die Teilungsgleichung der erststufigen elliptischen Funktionen den Anforderungen. Die Dreiteilungsgleichung vierten Grades erweist sich als äquianharmonisch, stellt also ein Tetraederpolynom dar. Die Vierteilungsgleichung bildet ein Oktaederpolynom, da ihre Nullstellen mit den Eckpunkten eines regulären Oktaeders projektiv sind [Abschnitt b)]. Bei der fünften Stufe stellen die Teilwerte nicht mehr die zwölf Eckpunkte eines Ikosaeders dar, es liegt aber nahe, das Ikosaederpolynom zwölften Grades als Ersatz heranzuziehen. Für die aufgezählten Polynome läßt sich die Tschirnhaustransformation des kogredienten Lösungssystems durch eine lineare gebrochene Substitution ersetzen [d)],

[3]) Soweit nicht ausführliche Literaturangaben gemacht werden, beziehe ich mich auf F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884, sowie F. Klein und R. Fricke, Elliptische Modulfunktionen, Leipzig 1890.

außerdem besteht für die Koeffizienten dieser Polynome ein einfaches Zuordnungsgesetz zu den Koeffizienten des Verzweigungspolynoms [c)].

Die Anzahl der Lösungssysteme läßt sich für die Stufen $n = 2, 3, 4, 5$ sofort angeben. Für $n = 2, 4$ ist die Galoissche Gruppe mit der Gruppe aller Permutationen von drei bzw. vier Elementen holoedrisch isomorph, so daß nur ein Lösungssystem vorhanden ist. Für $n = 3, 5$ ist die Galoissche Gruppe mit der Gruppe aller geraden Permutationen von vier bzw. fünf Elementen holoedrisch isomorph, und es sind zwei Lösungssysteme vorhanden entsprechend den geraden und ungeraden Permutationen. Die zweite Lösung für $n = 3$ wird durch das Gegentetraeder, welches das ursprüngliche Tetraeder zum Würfel ergänzt, gegeben. Die zugehörige Tschirnhaustransformation läßt sich jedoch nicht mehr durch eine lineare gebrochene Substitution darstellen [l)]. Die zweite Lösung für $n = 5$ ist durch das digrediente Ikosaeder[4]) gegeben, welches zum ursprünglichen Ikosaeder in keiner projektiven Beziehung steht. Zur Auffindung der Transformation, welche das eine Ikosaeder in das andere überführt, wird eine besondere Untersuchung über digrediente Formen notwendig [i)].

b) Satz über elliptische Funktionen.

Daß die Dreiteilung und Vierteilung der Perioden eines elliptischen Integrals ein Tetraeder- bzw. Oktaederpolynom ergibt, kann leicht durch Rechnung nachgewiesen werden. Ich ziehe es zunächst vor, vermittels eines Satzes, welcher unmittelbar aus der Beziehung der elliptischen Funktion erster Gattung zur Sigmafunktion folgt, diese Behauptung besonders zu begründen. Einen geometrischen Beweis werde ich bei anderer Gelegenheit geben.

Das elliptische Integral erster Gattung sei in der allgemeinen Form gegeben:

$$(7) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e}}.$$

Die untere Grenze des Integrals sei konstant, aber zunächst beliebig gewählt. Die Umkehrungsfunktion sei $\varphi(u)$. Bedeuten u_1, u_2, u_3, u_4 vier beliebige Argumente und s ihre halbe Summe, so besteht Gleichheit zwischen den Doppelverhältnissen,

$$(8) \qquad (\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3), \varphi(u_4)) = (\varphi(s-u_1), \varphi(s-u_2), \varphi(s-u_3), \varphi(s-u_4)).$$

---

[4]) An Stelle der ursprünglichen Bezeichnung „contragredient“ hat R. Fricke die Bezeichnung „digredient“ vorgeschlagen, um Verwechslungen mit dem geometrischen Begriff der Kontragredienz auszuschließen. Modulfunktionen 2, S. 135, Fußnote.

Werden u_1, u_2, u_3, u_4 um dieselbe Konstante vermehrt, so geschieht dies auch mit den Argumenten $s-u_1$, $s-u_2$, $s-u_3$, $s-u_4$. Wird die untere Grenze des Integrals (7) in einen der Verzweigungspunkte gelegt, so wird $\varphi(u)$ eine gerade Funktion. Das Wechseln der Vorzeichen von u_1, u_2, u_3, u_4 liefert aber nur eine neue Gleichung, da der Zeichenwechsel zweier Größen die Gleichung (8) in sich überführt. Wird der die untere Grenze abgebende Verzweigungspunkt durch lineare Substitution in den unendlich fernen Punkt transformiert, so erhalten wir eine Funktion, welche sich von der Weierstraßschen Funktion um eine lineare ganze Substitution unterscheidet. Für diese Funktion, welche mit $p(u)$ bezeichnet sei, folgt aus (8), wenn $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$ gesetzt wird, die Gleichung

$$(9)\quad (p(u_1), p(u_2), p(u_3), p(u_1+u_2+u_3)) = \frac{p(u_2+u_3)-p(u_1+u_2)}{p(u_1+u_3)-p(u_1+u_2)}.$$

Bedeuten ω_1 und ω_2 die Perioden des elliptischen Integrals, so folgt aus (8) für die Dreiteilung:

$$(10)\quad \left(p\left(\frac{\omega_1}{3}\right), p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right), p\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{3}\right), p\left(\frac{\omega_2}{3}\right)\right) = \left(p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right), p\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{3}\right), p\left(\frac{\omega_1}{3}\right), p\left(\frac{\omega_2}{3}\right)\right).$$

Diese Gleichung bedeutet, daß die Dreiteilungsgleichung äquianharmonisch ist. Für die Vierteilung erhält man aus (9)

$$(11)\quad \left(p\left(\frac{\omega_1}{4}\right), p\left(\frac{\omega_1}{4}+\frac{\omega_2}{2}\right), p\left(\frac{\omega_2}{4}\right), p\left(\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{4}\right)\right) = \frac{p\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{4}\right)-p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right)-p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}.$$

Werden aber u_1, u_2, u_3 in (9) um $\frac{\omega_1}{2}$ vermehrt, so geht die rechte Seite in sich selbst über. Somit bleibt das Doppelverhältnis links in (9) ungeändert, wenn die Argumente um $\frac{\omega_1}{2}$ vermehrt werden. Aus dieser Bemerkung folgt aber, daß das Doppelverhältnis in (11) harmonisch ist und den Wert -1 besitzt. Drei solcher Gleichungen lassen sich aufstellen, aus welchen hervorgeht, daß die Teilwerte mit den Eckpunkten eines regulären Oktaeders projektiv sind. Aus (11) folgt noch die Relation

$$(12)\quad 2p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = p\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{4}\right) + p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right).$$

Für die Fünfteilung ergeben sich folgende Relationen, wenn zur Abkürzung $m+n'$ für $p\left(\frac{m\omega_1+n\omega_2}{5}\right)$ gesetzt wird:

$$(13)\quad \begin{aligned} (2', \quad 1', \quad 2+1', 0) &= (1, 1+1', 1-1', 1+2'),\\ (1, 1+1', 1-1', 0) &= (2, 2+1', 2-1', \quad 1 \quad),\\ (1, 1+2', 1-2', 0) &= (2, 2+2', 2-2', \quad 1 \quad). \end{aligned}$$

Aus jeder dieser Gleichungen folgt, daß die Teilwerte nicht mehr die Eckpunkte eines regulären Ikosaeders bilden, da $p(0) = \infty$ in diesen auftritt. Von jedem Typus existieren 60 Gleichungen. Außerdem notiere ich noch die Relationen

$$(14) \qquad (1,\ 1',\ 2,\ 2') = (2+1', 1+2', 2-1', 1-2') = (1+1', 2+2', 1-1', 2-2').$$

Es gibt fünf solcher Trias.

c) Berechnung der Teilungsgleichungen von $p(u)$.

Für den Fortgang der Untersuchung werden die Teilungsgleichungen der verallgemeinerten Weierstraßschen Funktion $p(u)$ benötigt. Die Berechnung erfolgt elementar aus dem Additionstheorem. Setzen wir für das Verzweigungspolynom

$$(15) \qquad R(x) = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3,$$

ferner

$$(16) \qquad p(u) = x_1, \quad p(v) = x_2, \quad p(u \pm v) = x_3,$$

so ist das Additionstheorem gegeben durch die Gleichung

$$(17) \qquad a_0(x_1 + x_2 + x_3) + 3 a_1 = \left(\frac{\sqrt{R(x_1)} \mp \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \right)^2.$$

Durch Fortschaffen der Quadratwurzel in (17) erhält man die in x_1, x_2, x_3 symmetrische Gleichung [5])

$$(18) \qquad 4[a_0(x_1 x_2 x_3) + a_3][a_0(x_1 + x_2 + x_3) + 3 a_1] - [a_0(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - 3 a_2]^2 = 0.$$

Werden die elementarsymmetrischen Funktionen 3α, 3β, γ von x_1, x_2, x_3 eingeführt und eine Größe a_4 aus der Gleichung

$$(19) \qquad a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 = 0$$

definiert, so gewinnt (18) die Gestalt

$$(20) \qquad a_0(4\alpha\gamma - 3\beta^2) + 4 a_1 \gamma + 6 a_2 \beta + 4 a_3 \alpha + a_4 = 0.$$

Die Dreiteilungsgleichung wird erhalten, wenn $x_1 = x_2 = x_3$ gesetzt wird:

$$(21) \qquad \Phi_4(x) = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0.$$

Die Relation (19) bedeutet das Verschwinden der Invariante g_2 von Φ_4, so daß Φ_4 äquianharmonisch ist. Wir bemerken ein besonders einfaches Zuordnungsgesetz unter den Koeffizienten von Φ_4 in (21) und R in (15). Die mit Binomialkoeffizienten multiplizierten Größen a_0, a_1, a_2, a_3 ergeben die vier ersten Koeffizienten von Φ_4.

---

[5]) Indem $R(x)$ mit $a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + (c_0 x + c_1)^2$ identifiziert wird und c_0 und c_1 eliminiert werden, geht (18) unmittelbar hervor.

Die Vierteilungsgleichung kann aus der Formel für die Verdopplung des Arguments gewonnen werden. Setzen wir $x_3 = x_1 = x$, so berechnet sich x_2 zu

$$x_2 = \frac{a_0 x^4 - 6 a_2 x^2 - 8 a_3 x - 3 a_4}{4 (a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3)}. \tag{22}$$

Die Verdopplungseigenschaft gelangt in der Beziehung

$$R(x_2) = \frac{a_0^3 \Phi_6^2(x)}{4^3 R^3(x)} \tag{23}$$

zum Ausdruck. Im Zähler befindet sich das Quadrat eines Polynoms sechsten Grades, welches die gesuchte Teilungsgleichung ist. Durch Differentiation von (22) ergibt sich dies Polynom zu

$$\Phi_6(x) = a_0 x^6 + 6 a_1 x^5 + \binom{6}{2} a_2 x^4 + \binom{6}{3} a_3 x^3 + \binom{6}{2} a_4 x^2 + 6 a_5 x + a_6, \tag{24}$$

wenn die Beziehung (19) zur Anwendung gelangt und a_5 und a_6 aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3 &= 0, \\ a_0 a_6 - 9 a_2 a_4 + 8 a_3^2 &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

definiert werden. Daß Φ_6 eine Oktaederform ist, folgt aus der Beziehung (23), welche als eine Umformung der Kovariantenbeziehung eines Polynoms vierten Grades aufgefaßt werden kann. Die ersten Koeffizienten von Φ_6 stimmen abermals mit den Koeffizienten von R überein.

Die Fünfteilungsgleichung geht hervor aus der Bedingung

$$p(3u) = p(2u). \tag{26}$$

Die Formel für die Verdreifachung des Argumentes stellen wir indessen nicht auf, sondern setzen in (18) $x_1 = p(u)$, $x_2 = p(2u)$, dann werden die beiden Wurzeln, welche sich durch Ausrechnung nach x_3 ergeben, $p(3u)$ und $p(u)$ sein oder zufolge (26) x_2 und x_1. Somit ergeben sich die in x_1 und x_2 symmetrischen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2 &= 2 (x_1 + x_2)(a_0 x_1 x_2 + 3 a_2) + 4 (3 a_1 x_1 x_2 + a_3), \\ a_0 x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2 &= a_0 x_1^2 x_2^2 - 6 a_2 x_1 x_2 - 4 a_3 (x_1 + x_2) - 3 a_4. \end{aligned} \tag{27}$$

Durch Einsetzen von (22) in die erste Gleichung erhält man die Fünfteilungsgleichung. Die ersten Glieder sind

$$5 a_0 x^{12} + 60 a_1 x^{11} + \left(144 \frac{a_1^2}{a_0} + 186 a_2\right) x^{10} + \dots . \tag{28}$$

Wie ersichtlich, gelten nicht mehr die einfachen Gesetzmäßigkeiten, aber es läßt sich aus (27) eine Resolvente sechsten Grades von dieser Eigenschaft herleiten. Setzen wir in (27)

$$x_1 x_2 = y, \qquad x_1 + x_2 = 2z \tag{29}$$

und eliminieren y, so erhalten wir

$$(30)\quad a_0 z^6 + 6 a_1 z^5 + \binom{6}{2} a_2 z^4 + \binom{6}{3} a_3 z^3 + \binom{6}{2} a_4 z^2 + 6 a_5 z + a_6' = 0.$$

Der letzte Koeffizient ist durch die Gleichung

$$(31)\quad 4 a_0 a_6' - 9 a_1 a_5 + 5 a_3^2 = 0$$

definiert.

Das arithmetische Mittel aus den Werten $p\left(\frac{m\omega_1}{n}\right)$, in welchen ω_1 irgend eine Periode bedeutet und m alle zu n teilerfremden Zahlen durchläuft, definiert allgemein eine algebraische Gleichung, deren Anfangskoeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_5$ sind.

d) Symmetrische Lösungen.

Die abgeleiteten Teilungsgleichungen sind bei Anwendung ganzer linearer Substitutionen mit R kovariant. Durch diese Verallgemeinerung wird es nunmehr statthaft, die für das kogrediente Lösungssystem an Stelle der Tschirnhaustransformation in Aussicht genommene lineare gebrochene Substitution vermittels ganzer Substitutionen, welche auf beide Variablen ausgeübt werden, auf die Inversion

$$(32)\quad x = \frac{1}{x'}$$

zurückzuführen. Da (32) durch die ganzen Substitutionen

$$(33)\quad a x, \quad a^{-1} x'$$

in sich übergeht, werden die abzuleitenden Formeln, welche die vier beliebigen Größen a_0, a_1, a_2, a_3 enthalten, in zweifacher Weise homogen sein und somit nur zwei wesentliche Parameter enthalten.

Für die Zwei-, Drei- oder Vierteilung lassen sich die Lösungen des kogredienten Systems nunmehr sofort angeben. Das Verzweigungspolynom in (15) schreibt sich in homogenen Variablen wie folgt:

$$(34)\quad R = y(a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3).$$

Als ein Verzweigungspolynom, dessen elliptische Funktion denselben Zwei-, Drei- oder Vierteilungskörper wie die zu (34) gehörige Funktion besitzt, ergibt sich unter Anwendung der Substitution (32) und des im vorigen Abschnitt abgeleiteten Koeffizientengesetzes:

$$(35)\quad R_{(n)} = y(a_\nu x^3 + 3 a_{\nu-1} x^2 y + 3 a_{\nu-2} x y^2 + a_{\nu-3} y^3);\ n = 2, 3, 4;\ \nu = 3, 4, 6.$$

Diese Polynome entstehen aus (34), indem für die Koeffizienten die in bezug R, Φ_4, Φ_6 „inversen“ Koeffizienten gesetzt werden. Aus den Koeffizientenrelationen (19) und (25) geht für $n = 4$ die Symmetrie der Formel nicht hervor. Durch Inversion der Indizes in diesen Relationen ergeben sich zwei neue quadratische Relationen. Die Gültigkeit dieser Re-

lationen ergibt sich aus der Invariantentheorie, zufolge deren die vierte Überschiebung von Φ_6 verschwindet.

Vermittels der invariantentheoretischen Eigenschaften des Ikosaederpolynoms Φ_{12} können wir unser Koeffizientenschema erweitern, so daß (35) auch für $n = 5$ gültig ist. Der Beweis wird im Abschnitt f) geführt. Die Invariantentheorie liefert

$$(36) \qquad (\Phi_{12}, \Phi_{12})^4 = 0, \quad (\Phi_{12}, \Phi_{12})^8 = 0, \quad (\Phi_{12}, \Phi_{12})^{10} = 0.$$

Das Verschwinden der vierten Überschiebung ist auch den Polynomen Φ_6 und Φ_4 eigentümlich. Es kann daraus gefolgert werden, daß die durch (19) und (25) definierten Größen a_4 und a_5 Koeffizienten von Φ_{12} sind. Der nächste Koeffizient werde mit c_6 bezeichnet, nicht nur deswegen, weil er von der in (25) eingeführten Größe a_6 verschieden ist, sondern weil a_6 auch für die Ikosaederuntersuchungen noch Bedeutung gewinnt. Die erste Bedingung in (36) liefert eine Zahl von Relationen, welche zur Bestimmung der Koeffizienten mehr als hinreichend sind. Aber die Zahlenkoeffizienten in den Relationen steigen so stark an, daß es zweckmäßig ist, sie mit den Relationen der folgenden Bedingungen in (36) zu kombinieren. Als ein möglichst einfaches Gleichungssystem ermittelte ich das folgende:

$$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 = 0;$$

$$a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3 = 0;$$

$$7 a_0 c_6 - 12 a_1 a_5 - 15 a_2 a_4 + 20 a_3^2 = 0;$$

$$a_0 a_7 \quad * \quad - 6 a_2 a_5 + 5 a_3 a_4 = 0;$$

$$a_0 a_8 \quad * \quad * \quad - 16 a_3 a_5 + 15 a_4^2 = 0,$$
$$2 a_1 a_7 - 7 a_2 c_6 + 10 a_3 a_5 - 5 a_4^2 = 0;$$

$$a_0 a_9 + 3 a_1 a_8 \quad * \quad - 28 a_3 c_6 + 24 a_4 a_5 = 0,$$
$$a_1 a_8 - 2 a_2 a_7 \quad * \quad + a_4 a_5 = 0;$$

$$(37) \qquad a_0 a_{10} - 8 a_1 a_9 + 15 a_2 a_8 - 8 a_3 a_7 = 0,$$
$$a_1 a_9 \quad * \quad - 4 a_3 a_7 \quad * \quad + 3 a_5^2 = 0,$$
$$a_2 a_8 - 4 a_3 a_7 + 7 a_4 c_6 - 4 a_5^2 = 0;$$

$$a_0 a_{11} - 6 a_1 a_{10} + 10 a_2 a_9 - 5 a_3 a_8 = 0,$$
$$a_1 a_{10} + a_2 a_9 \quad * \quad - 16 a_4 a_7 + 14 a_5 c_6 = 0,$$
$$2 a_2 a_9 - 5 a_3 a_8 + 3 a_4 a_7 = 0;$$

$$a_0 a_{12} \quad * \quad - 36 a_2 a_{10} + 80 a_3 a_9 - 45 a_4 a_8 = 0,$$
$$a_1 a_{11} \quad * \quad + 5 a_3 a_9 - 5 a_4 a_8 - 50 a_5 a_7 + 49 c_6^2 = 0,$$
$$a_2 a_{10} \quad * \quad - 5 a_4 a_8 + 4 a_5 a_7 = 0.$$

Das Gleichungssystem wird vollständig, sobald eine Inversion der Indizes vorgenommen wird. Man bemerkt, daß die Berechnung der Größe c_6 zur Berechnung der folgenden Koeffizienten nicht erforderlich ist. Im besonderen sind acht Relationen vorhanden, in denen die Größen a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} linear und homogen eingehen. Im folgenden ordnen wir die Koeffizienten stets in das Schema

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_4 & a_9 \\ a_1 & a_5 & a_{10} \\ a_2 & a_7 & a_{11} \\ a_3 & a_8 & a_{12} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Die inversen Koeffizienten der letzten Spalte liefern sodann das kogrediente Lösungssystem für $n = 5$. Die Größen a_6 und c_6 werden, falls erforderlich, besonders aufgeführt. Die in (31) eingeführte Größe a_6' steht mit a_6 und c_6 in der linearen Beziehung

$$16\, a_6' = 21\, c_6 - 5\, a_6. \tag{39}$$

Auch für das zweite Lösungssystem des Falles $n = 3$ kann vermittels der Invariantentheorie eine symmetrische Lösung gegeben werden. Die Hessesche Kovariante von Φ_4 werde mit Ψ_4 bezeichnet. Die Nullstellen dieser Kovariante stellen die Eckpunkte des Gegentetraeders dar. Es gelten die Beziehungen

$$(\Phi_4,\ \Psi_4)^2 = 0, \qquad (\Phi_4,\ \Psi_4)^3 = 0, \tag{40}$$

welche sich in acht bilineare Relationen zwischen den Koeffizienten von Φ_4 und Ψ_4 umsetzen lassen. Bezeichnen wir die Koeffizienten von Ψ_4 mit b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, so ergibt sich als zweites Lösungssystem für $n = 3$ das Verzweigungspolynom

$$R'_{(3)} = y\,(b_4 x^3 + 3\, b_3 x^2 y + 3\, b_2 x y^2 + b_1 y^3). \tag{41}$$

Die Koeffizienten b_4, b_3, b_2, b_1 sind mit a_0, a_1, a_2, a_3 durch das symmetrische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_4 a_1 - 2\, b_3 a_2 + \ \ b_2 a_3 \quad\ * \quad\ &= 0, \\ b_4 a_0 \quad\ * \quad\ - 3\, b_2 a_2 + 2\, b_1 a_3 &= 0, \\ * \quad\ b_3 a_0 \quad - 2\, b_2 a_1 + \ \ b_1 a_2 &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

verbunden.

e) Unsymmetrische Lösungen des kogredienten Falles.

Die Reduktion von R, Φ_4, Φ_6, Φ_{12} auf die Weierstraßsche Normalform ergibt unsymmetrische Lösungen, die aber insofern eine Bedeutung haben, als sie eine verallgemeinerte Form der Irrationalitäten der regulären

Körper darstellen, deren nähere Betrachtung die Untersuchung in verschiedener Richtung vervollständigt. Zur Vereinfachung der Rechnungen üben wir auf die Weierstraßsche Normalform

$$\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} \tag{43}$$

die Substitutionen

$$x = \frac{x'}{12}, \quad g_2 = \frac{h_2}{12}, \quad g_3 = \frac{h_3}{6^3} \tag{44}$$

aus und erhalten

$$\sqrt{3} \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 3h_2 x - 2h_3}}. \tag{45}$$

Um zu einer absoluten Invariante zu gelangen, substituieren wir

$$x = x' \frac{h_3}{h_2}, \qquad \frac{h_2^3}{h_3^2} = h. \tag{46}$$

So ergibt sich

$$\sqrt{\frac{3h_2}{h_3}} \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 3hx - 2h}}. \tag{47}$$

Die in der Theorie der Modulfunktionen gebrauchte Invariante J steht mit h in der Beziehung

$$J : J - 1 : 1 = h : 1 : h - 1. \tag{48}$$

Für die Normalform (45) geht das Koeffizientenschema (38) in

$$\begin{pmatrix} 1 & -3h_2^2 & -8h_3(3^4 h_2^3 - 5\cdot 2^4 h_3^2) \\ 0 & -4h_2 h_3 & -9h_2^2(15^2 h_2^3 - 7\cdot 2^5 h_3^2) \\ -h_2 & -6h_2^2 h_3 & -10h_2 h_3(19\cdot 3^3 h_2^3 - 2^9 h_3^2) \\ -2h_3 & -h_2(3^3\cdot 5\cdot h_2^3 - 2^7 h_3^2) & 5^3\cdot 3^6 h_2^6 - 7\cdot 3^3\cdot 2^{10} h_2^3 h_3^2 + 5^2\cdot 2^{12} h_3^4 \end{pmatrix} \tag{49}$$

über, es ist ferner

$$a_6 = 3^3 h_2^3 - 2^5 h_3^2, \quad a_6' = -5h_3^2, \quad 7c_6 = 5(9h_2^3 - 16h_3^2). \tag{50}$$

Die Wirkung der Substitution (46) wird erhalten, indem $h_2 = h_3 = h$ gesetzt wird.

Üben wir auf das Verzweigungspolynom in (47) die Substitution $x - 1$ aus, so erhalten wir

$$x^3 - 3x^2 - 3x(h-1) + (h-1). \tag{51}$$

Für dieses Polynom sind a_2 und a_3 durch $h - 1$ teilbar. Die Koeffizientenrelationen von (37) gestatten, die Teilbarkeit aller folgenden Koeffizienten

$a_4, a_5, \ldots$ durch Potenzen von $h-1$ zu ermitteln. Die Tabelle

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{52}$$

gibt entsprechend dem Schema (38) die Exponenten der Potenzen von $h-1$ an, durch welche die Koeffizienten teilbar sind. Ferner haben a_6, a_6', c_6 die Exponenten 2, 1, 1. Man bemerkt leicht, daß durch diese Eigenschaft die Polynome Φ_4, Φ_6, Φ_{12} eindeutig bestimmt sind. Entsprechend dem Teilungsgrad n behält der Exponent von a_2 gerechnet bei n aufeinanderfolgenden Koeffizienten denselben Wert und steigt sodann um eine Einheit[6]).

Die reduzierten Polynome werden zur Unterscheidung von den allgemeinen Polynomen R, Φ_4, Φ_6, Φ_{12} mit $\varphi_\nu(x, h_2, h_3)$ $(\nu = 3, 4, 6, 12)$ bezeichnet. Vermittels einer Substitution $x+q$ gelangt man zu den allgemeinen Polynomen zurück. Nach dem Taylorschen Satz ergibt sich

$$a_\nu = \varphi_\nu(q), \quad a_{\nu-1} = \frac{1}{\nu}\varphi_\nu'(q), \quad a_{\nu-2} = \frac{1}{\nu(\nu-1)}\varphi_\nu''(q), \ldots, \tag{53}$$

im besonderen

$$a_3 = q^3 - 3qh_2 - 2h_3, \quad a_2 = q^2 - h_2, \quad a_1 = q, \quad a_0 = 1. \tag{54}$$

Die Ausrechnung nach q, h_2, h_3 ergibt

$$\begin{aligned} q &= a_1, \qquad h_2 = a_1^2 - a_0 a_2, \\ -2h_3 &= 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3. \end{aligned} \tag{55}$$

Die inversen Größen seien mit Q, H_2, H_3 bezeichnet, und es ist

$$\begin{aligned} Q &= a_{\nu-1}, \qquad H_2 = a_{\nu-1}^2 - a_\nu a_{\nu-2}, \\ -2H_3 &= 2a_{\nu-1}^3 - 3a_\nu a_{\nu-1} a_{\nu-2} + a_\nu^2 a_{\nu-3}. \end{aligned} \tag{56}$$

Bei Anwendung der Relationen (53) sind Q, H_2, H_3 durch q, h_2, h_3 ausgedrückt. Es ist leicht zu zeigen, daß H_2 zufolge (53) die Hessesche Kovariante von $\varphi_\nu(q)$ ist und H_3 die Jacobische Kovariante aus der Hesseschen Kovariante und der Grundform. Somit erfüllen H_2, H_3, φ_ν je nach

---

[6]) Diese Bemerkung läßt sich anwenden auf die diophantische Gleichung

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^3 = c_3 x_3^n \qquad (n = 2, 3, 4, 5)$$

(c_1, c_2, c_3 ganze zu je zweien teilerfremde Zahlen), und zwar kann gefolgert werden, daß die Polynome Φ_ν der verschiedenen Lösungssysteme, welche verschiedene Irrationalitäten definieren, in ihrer einfachsten arithmetischen Gestalt dieselben nur von c_1, c_2, c_3 abhängigen Invarianten besitzen.

dem Wert von ν die Identität des Dieders, Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders:

$$H_2^3 - H_3^2 = (h_2^3 - h_3^2)\,\varphi_\nu^n(q); \quad n = 2, 3, 4, 5; \quad \nu = 3, 4, 6, 12. \tag{57}$$

Für das Dieder findet man die Formeln

$$\begin{aligned} Q &= q^2 - h_2, \qquad H_2 = q^2 h_2 + 2 q h_3 + h_2^2, \\ -H_3 &= q^3 h_3 + 3 q^2 h_2^2 + 3 q h_2 h_3 + 2 h_3^2 - h_2^3. \end{aligned} \tag{58}$$

Von den Tetraederformen merken wir die Hessesche Kovariante von φ_4 an, welche mit ψ_4 bezeichnet werde,

$$H_2 = \psi_4(q, h_2, h_3) = q^4 h_2 + 4 q^3 h_3 + 6 q^2 h_2^2 + 4 q h_2 h_3 + 4 h_3^2 - 3 h_2^3. \tag{59}$$

f) Eigenschaften des Parameters q.

Die aus den Proportionen

$$H : 1 : H - 1 = H_2^3(q, h_2, h_3) : H_3^2(q, h_2, h_3) : (h_2^3 - h_3^2)\cdot\varphi_\nu^n(q, h_2, h_3) \tag{60}$$

definierte Größe H stellt in Abhängigkeit von q die konforme Abbildung des sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{n}$ auf die Fläche eines Kreises dar. Dieselbe Abbildung leistet der Galoissche Hauptmodul der n-ten Teilungsgleichung. Wird daher für H dieser Modul eingeführt, so besteht zwischen diesem und der Größe q eine lineare gebrochene Substitution. Die Gleichung (60) wird also reduzibel, aber der Rationalitätsbereich der Koeffizienten der Substitution ist durch den Galoisschen Körper der n-ten Teilungsgleichung des elliptischen Integrals (45) gegeben. Werden auch für h_2 und h_3 Galoissche Modulformen der n-ten Stufe gesetzt, so sind die Koeffizienten rational ausdrückbar. Indem man ausgeht von den Grundformen

$$\begin{aligned} f_3 = \eta_1\eta_2(\eta_1 - \eta_2), \quad f_4 = \eta_2(\eta_1^3 - \eta_2^3), \quad f_6 = \eta_1\eta_2(\eta_1^4 - \eta_2^4), \\ f_{12} = \eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\,\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10}), \end{aligned} \tag{61}$$

ist für h_2 die Hessesche Kovariante dieser Formen und für h_3 die Jacobische Kovariante aus dieser und der Grundform zu setzen, und zwar sind diese so zu normieren, daß der Koeffizient der höchsten Potenz gleich der Einheit ist[7]). Der für H eingeführte Hauptmodul sei η', so ergibt sich als lineare Substitution

$$\eta' = \frac{\eta_1 q + \dfrac{\partial f_\nu}{\partial \eta_2}}{\eta_2 q - \dfrac{\partial f_\nu}{\partial \eta_1}}, \qquad \nu = 3, 4, 6, 12. \tag{62}$$

[7]) Die Formen stimmen überein mit den bei Klein-Fricke, loc. cit. **1**, S. 621 bis 622 angegebenen, mit Ausnahme der zweiten kubischen Form des Dieders.

Um die Richtigkeit dieser Formel nachzuweisen, führen wir zunächst in (60) die absolute Invariante h ein, üben also auf q die Substitution (46) aus. Sodann geht (62) über in

$$\eta' = \frac{\eta_1 h_3 q + h_2 \frac{\partial f_\nu}{\partial \eta_2}}{\eta_2 h_3 q - h_2 \frac{\partial f_\nu}{\partial \eta_1}}. \tag{63}$$

Diese Formel enthält alle mit η' kogredienten Funktionen, wenn für q eine beliebige rationale Funktion von h gesetzt wird, wobei h selbst von $\eta_1 : \eta_2$ abhängig zu denken ist[8]). Durch Betrachtung spezieller Funktionen kann nunmehr leicht der Zusammenhang von (60) und (62) gegeben werden. Die dem Elementardreieck $\Delta\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right)$ benachbarten Dreiecke werden durch folgende Funktionen auf das Elementardreieck konform abgebildet.

$$\begin{array}{lll} \Delta\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right) & q = \infty & \eta' = \eta_1 : \eta_2 \\ \Delta\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right) & 0 & -\frac{\partial f_\nu}{\partial \eta_2} : \frac{\partial f_\nu}{\partial \eta_1} \\ \Delta\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{(n-1)\pi}{n}\right) & -1 & -\frac{\partial h_3}{\partial \eta_2} : \frac{\partial h_2}{\partial \eta_1} \\ \Delta\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{(n-1)\pi}{n}\right) & -h & -\frac{\partial h_3}{\partial \eta_2} : \frac{\partial h_3}{\partial \eta_1}. \end{array} \tag{64}$$

Setzt man die angegebenen Werte für q in die verallgemeinerte Gleichung der regulären Körper (60) ein, so gehen rationale Funktionen von h hervor, welche bei der konformen Abbildung der Dreiecke (64) auf die Fläche eines Kreises in Erscheinung treten. Um dieses Resultat näher auszuführen, so stellt (60) in den Veränderlichen H und h eine rationale Funktion dar, deren Verzweigungspunkte bei $H = 0, 1, \infty$ liegen, mit Ausnahme eines Verzweigungspunktes, dessen Lage von dem Wert des Parameters q abhängt. Wird allgemeiner für q eine rationale Funktion von h mit unbestimmten Koeffizienten in (60) eingesetzt, so entsteht eine rationale Funktion von h, welche außerhalb $H = 0, 1, \infty$ so viele Verzweigungspunkte besitzt, als unbestimmte Koeffizienten vorhanden sind. Die dem Elementardreieck verwandten Dreiecke definieren durch ihre Zusammensetzung aus Elementardreiecken nach bekannten funktionentheoretischen Methoden Verzweigungsschemata von rationalen Funktionen, welche spezielle Fälle der soeben betrachteten Funktionen bilden, und zwar werden diese Fälle erhalten, wenn die beweglichen Verzweigungspunkte (in der Variable h betrachtet) in die Punkte $h = 0, 1, \infty$ verlegt werden. Diese Bedingungen bestimmen q als Funktion von h. Aus der Theorie der verwandten hyper-

[8]) F. Klein, Ikosaeder, S. 229.

geometrischen Funktionen folgt, daß diese rationalen Funktionen eindeutig bestimmt sind, ihre Koeffizienten also rationale Größen sind. Durch sukzessive Bestimmung dieser Funktionen kann das Resultat auch unmittelbar eingesehen werden.

Aus (62) ergibt sich die Folgerung, daß das Koeffizientenschema des Ikosaederpolynoms Φ_{12} in (38) das kogrediente Lösungssystem für $n = 5$ liefert. Denn die Polynome Φ_{12} und R wurden durch dieselbe lineare ganze Substitution reduziert.

g) Das zweite Lösungssystem für $n = 3$ und 5.

Die Gleichung des Dieders und Tetraeders haben zufolge der Symmetrie des Elementardreiecks besondere Eigenschaften. Beim Dieder liefert die Polare des quadratischen Polynoms H_2 in (58) gleich Null gesetzt eine lineare Substitution,

$$q' = -\frac{q+h}{q+1}, \tag{65}$$

welche H_2 in sich, und dabei φ_3 und H_3 ineinander überführt.

Unter den Tetraederformen befindet sich keine quadratische Kovariante, aus welcher eine lineare Substitution abgeleitet werden könnte. Es läßt sich aber eine simultane Transformation in q und h angeben:

$$q = -q' - 1, \qquad h = 1 - h', \tag{66}$$

welche die Polynome φ_4 und ψ_4 ineinander überführt. Daß beide Polynome denselben algebraischen Körper definieren, folgt durch Einführung des Tetraedermoduls

$$h : 1 : h-1 = \xi^3(\xi^3+8)^3 : (\xi^6 - 20\,\xi^3 - 8)^2 : 64\,(\xi^3-1)^3. \tag{67}$$

Bei Anwendung der Substitution

$$\xi = -\frac{2}{\xi'}, \tag{68}$$

welche die Tetraedergruppe zur Oktaedergruppe erweitert, wird in (67) $1-h$ statt h erhalten. Wir folgern:

Werden in dem kogredienten Lösungssystem für $n = 3$ die Größen H und h durch

$$1 - H \quad \text{bzw.} \quad 1 - h \tag{69}$$

ersetzt, so wird dasselbe Lösungssystem erhalten, wird hingegen nur eine dieser Substitutionen ausgeübt, so wird das zweite Lösungssystem erhalten.

Das zweite Lösungssystem für $n = 5$ wird auf folgendem Wege gefunden. In der Schwarzschen Tabelle[9]) der sphärischen Dreiecke, deren

[9]) Crelles Journal **75** (1873), S. 292.

konforme Abbildung auf den Vollkreis durch eine algebraische Funktion vermittelt wird, ist in Nr. XIV ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{5}$ angegeben, dessen Abbildungsfunktion vom Geschlechte Null ist, obschon dieses Dreieck mit dem Elementardreieck nicht verwandt ist. Dieses Dreieck kann aus sieben Elementardreiecken zusammengesetzt werden. Die zugeordnete rationale Funktion siebenten Grades ist von F. Klein berechnet worden[10]). Im folgenden findet sie in der Gestalt[11])

$$(70) \qquad h' : 1 : h' - 1 = -h(5^5 h^2 - 5^3 \cdot 77\, h + 2^9 \cdot 7)^3$$
$$(5^7 \cdot 7\, h^3 - 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 71\, h^2 + 2^8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 107\, h - 2^{15})^2 : -(h-1)^2 (5^3 h + 2^6)^5$$

Verwendung. Daß die aus den Invarianten h und h' hervorgehenden Fünfteilungsgleichungen denselben algebraischen Körper definieren, folgt durch Einführung der Ikosaedermoduln ζ und ζ', wodurch die Funktion (70) reduzibel wird. Die Beziehung zwischen ζ und ζ' geht durch Nullsetzen einer digredienten Form hervor:

$$(71) \qquad \zeta' = \frac{\zeta^7 - 7\zeta^2}{7\zeta^5 + 1}.$$

Der Lösung h' in (70) können wir ein Verzweigungspolynom R' zuordnen, zunächst in der Form

$$(72) \qquad \begin{aligned} R' &= x^3 - 3x h_2' - 2h_3', \\ h_2' &= -h(5^5 h^2 - 5^3 \cdot 77\, h + 2^9 \cdot 7), \\ h_3' &= -h(5^7 \cdot 7\, h^3 - 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 71\, h^2 + 2^8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 107\, h - 2^{15}). \end{aligned}$$

Vermöge der Substitution

$$(73) \qquad x = (5^3 h + 2^6) x' + 5 \cdot 3^3 h$$

vereinfacht sich das Polynom zu

$$(74) \quad R' = (5^3 h + 2^6) x^3 + 5 \cdot 3^4 h x^2 + 3h(5^2 h + 7 \cdot 2^3) x + h(11h + 2^4).$$

Werden die Koeffizienten des Polynoms in die Formeln (37) eingesetzt, so berechnen sich die folgenden Koeffizienten $a_4, a_5, \ldots$ als ganze Funktionen von h bzw. h_2 und h_3, was aus dem Exponentenschema (52) und dem Umstande, daß a_0 in (70) bei $h' - 1$ zur fünften Potenz eingeht, eingesehen werden kann. Das gewonnene, zu φ_{12} digrediente Ikosaederpolynom bezeichnen wir mit ψ_{12} und gelangen, falls H_2 und H_3 wiederum die Hessesche und Jacobische Kovariante bedeuten, zu der Identität

$$(75) \qquad H_2^3 - H_3^2 = -(h_2^3 - h_3^2)^2 \cdot \psi_{12}^5(q, h_2, h_3)$$

[10]) Math. Annalen **12** (1877), S. 167.

[11]) Diese ergibt sich aus der O. Fischerschen Umrechnung (Leipziger Dissertation 1885) vermöge der Substitution

$$z = h : h - 1.$$

und zu der Ikosaedergleichung

$$H:1:H-1=H_2^3:H_3^2:-(h_2^3-h_3^2)^2\psi_{12}, \tag{76}$$

welche das zweite Lösungssystem für $n=5$ darstellt.

Wird auf R' in (74) die Substitution $x-1$ ausgeübt:

$$(5^3h+2^6)x^3+6(5h-32)x^2+3(h-1)(5^2h-2^6)x-2^6(h-1)^2,$$

so besitzt a_2 den Teiler $h-1$ und a_3 den Teiler $(h-1)^2$. Aus (37) stellt man für das Koeffizientenschema entsprechend (52) folgende Exponenten der Potenzen von $h-1$ fest:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Die Erweiterung der Gleichung (71) ist gegeben durch

$$z'=\frac{(\zeta_1^7-7\zeta_1^2\zeta_2^5)q-(\zeta_1^{17}+7\cdot17\zeta_1^{12}\zeta_2^5+11\cdot17\zeta_1^7\zeta_2^{10}+17\zeta_1^2\zeta_2^{15})}{(7\zeta_1^5\zeta_2^2+\zeta_2^7)q-(17\zeta_1^{15}\zeta_2^2-11\cdot17\zeta_1^{10}\zeta_2^7+7\cdot17\zeta_1^5\zeta_2^{12}-\zeta_2^{17})}. \tag{79}$$

Der Zusammenhang dieser Formel mit der Ikosaedergleichung (76) geht wiederum aus der Bemerkung hervor, daß (76) für $h_2q:h_3=\infty$, 0, -1, $-h$ in eine rationale Funktion von h übergeht, welche bei der konformen Abbildung des Dreiecks $\Delta(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{5})$ bzw. seiner benachbarten Dreiecke auf die Fläche eines Kreises auftritt.

h) Umformung der unsymmetrischen Lösungssysteme.

Die Normalformen der elliptischen Integrale für die Hauptmoduln λ, ξ, μ, ζ der 2, 3, 4, 5-ten Stufe lassen eine einfache invariantentheoretische Darstellung durch kogrediente Formen zu, und zwar kann das Verzweigungspolynom R als Produkt der bilinearen Form und der dritten Polare der in (61) aufgeführten Grundform f_ν geschrieben werden:

$$3(\nu-1)(\nu-2)\cdot R(x_1,x_2)=(x_1\eta_2-x_2\eta_1)\cdot f_\nu\left(x_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}+x_2\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right)^3. \tag{80}$$

Die Ausrechnung für $n=2, 3, 4$ ergibt

$$\begin{aligned} R &= x_1x_2(x_1-x_2)(\lambda_2x_1-\lambda_1x_2), \\ 3R &= (x_1\xi_2-x_2\xi_1)(x_1^3\xi_2+3x_1^2x_2\xi_1-4x_2^3\xi_2), \\ R &= (x_1^2\mu_2^2-x_2^2\mu_1^2)(x_1^2\mu_1^2-x_2^2\mu_2^2). \end{aligned} \tag{81}$$

Wird nunmehr f_ν durch die allgemeinere Form φ_ν ersetzt und für das Verhältnis $\eta_1:\eta_2$ die Größe q gesetzt, so ergeben sich Formeln, welche aus

den durch (53) und (35) gegebenen unsymmetrischen Lösungssystemen vermittels der Substitution

$$x = \frac{1}{x'} \cdot \frac{}{q} \tag{82}$$

hervorgehen. Für $n = 2$ wird erhalten

$$R_{(2)} = (x_1 - q x_2)(x_1^3 - 3 h_2 x_1 x_2^2 - 2 h_3 x_2^3). \tag{83}$$

Das kogrediente Lösungssystem für $n = 3$ kann unter Vertauschung von x und q in der Gestalt

$$R_{(3)} = (x_1 - q x_2)\left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1} q + \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_2}\right) \tag{84}$$

geschrieben werden. Das zweite Lösungssystem wird erhalten, wenn φ_4 durch die Hessesche Kovariante ψ_4 in (59) ersetzt wird. Die Formeln für $n = 4$ und 5 geben nicht die einfachste Gestalt der Lösungssysteme, da die Diskriminante der kubischen Polare noch φ_6^2 bzw. φ_{12}^3 enthält. In den beiden folgenden Abschnitten werden diese Umformungen behandelt. Für $n = 5$ wird die Aufgabe vermittels einer Darstellung des Verzweigungspolynoms R durch digrediente Formen gelöst:

$$[x_1(7\zeta_1^5\zeta_2^2 + \zeta_2^7) - x_2(\zeta_1^7 - 7\zeta_1^2\zeta_2^5)][x_1^3\zeta_1\zeta_2^2 + x_1^2 x_2 \zeta_1^3 + x_1 x_2^2 \zeta_2^3 + x_2^3 \zeta_1^2 \zeta_2] \tag{85}$$

i) Die verallgemeinerten digredienten Formen des Ikosaeders.

Die Tschirnhaustransformationen, welche die zueinander digredienten Ikosaederpolynome ineinander überführen, und die im vorigen Abschnitt erwähnten Umformungen der Lösungssysteme für $n = 5$ werden aus den verallgemeinerten digredienten Ikosaederformen gefunden. Während in der Theorie der Galoisschen Moduln ein und dasselbe digredient auf sich selbst bezogene System von Ikosaedersubstitutionen Verwendung findet, sind bei den verallgemeinerten Formen diese Systeme notwendig voneinander verschieden, da das digrediente Polynom ψ_{12} von dem Grundpolynom φ_{12} zu unterscheiden ist. Dennoch bleibt die von Gordan gegebene Theorie[12]) der digredienten Formen anwendbar, da sie sich auf die Invariantentheorie der doppelt binären Formen von zwei unabhängigen Variablen stützt. Ich gehe aus von dem aus zwei Galoisschen Moduln ζ_a, ζ_b gebildeten digredienten Grundpolynom [vgl. (85)]

$$\zeta_b^3 \zeta_a + \zeta_b^2 \zeta_a^3 - \zeta_b + \zeta_a^2 = 0 \tag{86}$$

und übe auf ζ_a und ζ_b die Substitutionen (62) und (79) aus:

$$\zeta_a = \frac{x\zeta + \zeta^{11} \ldots}{x - 11\zeta^{10} \ldots}, \qquad \zeta_b = \frac{z(\zeta^7 - 7\zeta^2) + \zeta^{17} \ldots}{z(7\zeta^5 + 1) - 17\zeta^{15} \ldots}. \tag{87}$$

[12]) P. Gordan, Math. Annalen **13** (1878), S. 375.

Es ergibt sich ein Polynom in x und z, dessen Koeffizienten durch f_{12}, h_2, h_3 ausgedrückt werden können. Da f_{12} als Faktor heraustritt, gewinnt das Polynom die Gestalt

$$(88)\quad f = c_{33}x^3z^3 + h_2(c_{31}x^3z + c_{22}x^2z^2 + c_{13}xz^3) + \ldots + c_{00}h_2^3 + c'_{00}h_3^2,$$

und zwar bedeuten die Koeffizienten $c_{33}, c_{31}, \ldots$ ganze Zahlen. Sämtliche Zahlkoeffizienten bis auf c_{00} und c'_{00} gehen hervor durch Vergleich mit den Gliedern höchster Potenzen in ζ:

$$(89)\quad \frac{1}{8}[(x+\zeta^{10})(x-11\zeta^{10})^2(z+\zeta^{10})^3 + (x+\zeta^{10})^3(z+\zeta^{10})^2(7z-17\zeta^{10})]\ldots.$$

Das verallgemeinerte Grundpolynom berechnet sich zu

$$(90)\quad \begin{aligned} f = {} & x^3z^3 - 3xzh_2(x^2+3xz-5z^2) - 2h_3(x^3+9x^2z-18xz^2-8z^3) \\ & - 9h_2^2(x^2-3xz-5z^2) + 6h_2h_3(x+7z) - 27h_2^3 + 40h_3^2. \end{aligned}$$

Als kubisches Polynom in z aufgefaßt, hat f die Diskriminante

$$(91)\qquad (h_2^3 - h_3^2)\,\varphi_{12}(x, h_2, h_3),$$

hingegen in x die Diskriminante

$$(92)\qquad \psi_{12}(z, h_2, h_3).$$

Das Polynom f kann auch aus der invarianten Eigenschaft

$$(93)\qquad (f, f)_{2,2} = 0$$

gewonnen werden[13]). Wir bilden das Polynom $(f, f)_{1,1} = g$, in welchem jede der Variablen bis zum vierten Grade ansteigt. Aus

$$(94)\qquad (f, g)_{0,3} = 6(h_2^3 - h_3^2)\cdot\vartheta$$

finden wir ein Polynom ϑ, welches in x bis zum siebenten Grade ansteigt und in z bis zum ersten Grade. $\vartheta = 0$ liefert eine rationale Funktion siebenten Grades, deren Verzweigungspunkte durch $\varphi_{12}(x) = 0$ gegeben sind. Durch diese Funktion werden die Wurzeln von $\varphi_{12}(x)$ in die von $\psi_{12}(z)$ transformiert. Zum Beweis ist die aus Galoisschen Moduln gebildete rationale Funktion (71) heranzuziehen, welche f_{12} in sich transformiert. Ebenso finden wir aus

$$(95)\qquad (f, g)_{3,0} = 6\vartheta'$$

die rationale Funktion, deren Verzweigungspunkte durch $\psi_{12}(z)$ gegeben sind, und welche die Wurzeln von $\psi_{12}(z)$ in die von $\varphi_{12}(x)$ transformiert. Das Produkt

$$(96)\qquad R_{(5)} = \vartheta\cdot f$$

[13]) Auf diesem Wege habe ich das Polynom ursprünglich ermittelt.

liefert die gesuchte Umformung des kogredienten Lösungssystems, sobald z als die Variable des Verzweigungspolynoms aufgefaßt wird, während für x der Parameter q gesetzt wird. Ebenso ergibt sich in dem Produkt

$$R'_{(5)} = \vartheta' \cdot f \tag{97}$$

die Umformung für das digrediente Lösungssystem, wenn x die Variable des Verzweigungspolynoms bedeutet, während für z der Parameter q zu setzen ist.

Die aus $\vartheta = 0$ hervorgehende rationale Funktion berechnet sich zu

$$z = \frac{x^7 + \binom{7}{2} h_2 x^5 + \binom{7}{3} \cdot 4 h_3 x^4 + \binom{7}{3} \cdot 9 h_2^2 x^3 + \binom{7}{2} \cdot 16 h_2 h_3 x^2 + 7 \cdot 5 (2^5 h_2^2 - 3^3 h_2^3) x + 36}{7 (x^6 - 15 h_2 x^4 - 40 h_3 x^3 - 45 h_2^2 x^2 - 24 h_2 h_3 x) + 5 (2^7 h_2^3 - 3^3 \cdot 5 h_3^2)} \tag{98}$$

Die Transformation läßt bemerkenswerte Folgerungen zu, sobald die Substitutionen

$$x = x' + q, \qquad z = z' + q \tag{99}$$

ausgeführt werden und die Größen q, h_2, h_3 durch a_0, a_1, a_2, a_3, ... ersetzt werden. Durch diese Substitutionen geht φ_{12} in das allgemeinere Polynom Φ_{12} über und ψ_{12} in ein Polynom, welches wir mit Ψ_{12} bezeichnen. Wir erhalten das Ergebnis: Die rationale Funktion

$$z = \frac{a_0 x^7 - \binom{7}{2} a_2 x^5 - \binom{7}{3} 2 a_3 x^4 - \binom{7}{3} 3 a_4 x^3 - \binom{7}{2} 4 a_5 x^2 - 7 \cdot 5 a_6 x - 6 a_7}{7 \left(a_0 x^6 + 6 a_1 x^5 + \binom{6}{2} a_2 x^4 + \binom{6}{3} a_3 x^3 + \binom{6}{2} a_4 x^2 + 6 a_5 x + 6 c_6 - 5 a_6 \right)} \tag{100}$$

hat ihre Verzweigungspunkte bei $\Phi_{12}(x) = 0$ bzw. $\Psi_{12}(z) = 0$, führt also die Nullstellen von Φ_{12} in die von Ψ_{12} über.

In (100) ist die Variable z dadurch eindeutig bestimmt, daß im Nenner ein Polynom vom sechsten Grade steht, der zweite Koeffizient des Polynoms im Zähler Null ist und die Anfangskoeffizienten der Polynome einander gleich sind. Üben wir auf (100) die Substitution x^{-1} aus, so kann vermittels einer linearen Substitution in z

$$z' = -\frac{6 a_5 z + 5 a_6}{7 (6 c_6 - 5 a_6) z + 6 a_7} \tag{101}$$

die rationale Funktion auf dieselbe Normierung gebracht werden. Dieselbe Funktion zwischen z' und x^{-1} wird aus (100) durch Einführung der in bezug auf das Ikosaeder inversen Koeffizienten erhalten. Hierbei bleibt zunächst zweifelhaft, welche Größe an Stelle des letzten Oktaederkoeffizienten a_6 zu setzen ist. Aber aus der Substitution (101), welche beim Einsetzen der inversen Koeffizienten in die inverse Substitution übergehen muß, kann gefolgert werden, daß a_6 in bezug auf die Substitution x^{-1}

invariant ist. Jede lineare Verbindung aus c_6 und a_6 hat diese Eigenschaft, also zufolge (39) auch der letzte Koeffizient a_6' des Polynoms in (30). Die Substitutionsdeterminante von (101) hat den Wert

$$-36\,a_5 a_7 + 35\,a_6(6\,c_6 - 5\,a_6) = -a_0 a_{12}, \tag{102}$$

wie durch Berechnung des letzten Koeffizienten von Φ_{12} aus (100) sich ergibt. (100) liefert noch andere den Oktaederkoeffizienten a_6 enthaltende quadratische Relationen, welche mit den Relationen (37) kombiniert folgende einfache Gleichungen ergeben:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 a_8 & * & -4\,a_2 a_6 & * & +3\,a_4^2 & = 0, \\ a_0 a_9 & * & * & -10\,a_3 a_6 & +9\,a_4 a_5 & = 0, \\ & 3\,a_2 a_8 & -8\,a_3 a_7 & +5\,a_4 a_6 & & = 0, \\ & a_2 a_9 & * & -6\,a_4 a_7 & +5\,a_5 a_6 & = 0. \end{array} \tag{103}$$

Zufolge der obigen Bemerkung über a_6 werden durch Inversion neue Gleichungen gewonnen. Bis auf die Gleichung

$$4\,a_3 a_9 - 9\,a_4 a_8 * + 5\,a_6^2 = 0, \tag{104}$$

welche später abgeleitet wird und welche der Vollständigkeit halber aufgezählt werden soll, sind hiermit sämtliche quadratische Relationen des Koeffizientensystems hergeleitet. Ich erwähne noch eine Umformung von (100):

$$\frac{7(6c_6 - 5a_6)z - 6a_7}{a_0} = -\frac{(6c_6 - 5a_6)x^7 - 6a_7x^6 + 15a_8x^5 - \ldots - a_{12}x}{a_0x^6 + 6a_1x^5 + 15a_2x^4 + \ldots + (6c_6 - 5a_6)}. \tag{105}$$

Von der aus $\vartheta' = 0$ hervorgehenden Transformation, welche die Nullstellen von ψ_{12} in die von φ_{12} überführt, berechnen wir die Anfangsglieder und erhalten

$$x = -\frac{z^7(25h_2^3 - 16h_3^2) + 7\cdot 9z^6 h_2^2 h_3 \ldots}{9z^7 h_2 h_3 + 7z^6(5h_2^3 - 4h_3^2)\ldots}. \tag{106}$$

Wird die Transformation vermittels der Substitution[14])

$$x' = -\frac{(5h_2^3 + 4h_3^2)x + 9h_2^2 h_3}{9h_2 h_3 x + (25h_2^3 - 16h_3^2)} \tag{107}$$

in die Normierung der rationalen Funktion (100) übergeführt, so läßt sich im Zähler und Nenner der Faktor $h_2^3 - h_3^2$ heben. Die hergeleitete Funktion wird unmittelbar aus (100) erhalten, wenn an Stelle von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die Werte der Koeffizienten von ψ_{12} in (74) gesetzt werden. Die Bedeutung der Substitution (107) ist folgende:

[14]) Die Substitution ist zerlegbar in:

$$\begin{pmatrix} -4h_3 & 5h_2^2 \\ 25h_2 & 16h_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -h_3 & -h_2^2 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix}. \tag{108}$$

Werden in dem Polynom Ψ_{12} [vgl. (99)] an Stelle von a_0, a_1, a_2, a_3 die Koeffizienten des digredienten Ikosaeders ψ_{12} eingesetzt, so gelangen wir zwar zu dem ursprünglichen Ikosaeder zurück, das erhaltene Polynom geht aber erst durch Anwendung der Substitution (107) in das Polynom $\varphi_{12}(x, h_2, h_3)$ über.

k) Bemerkungen über das Oktaeder.

Für das Oktaeder läßt sich eine entsprechende rationale Funktion vierten Grades aufstellen,

$$z \quad \frac{a_0 x^4 - 6 a_2 x^2 - 8 a_3 x - 3 a_4}{4 (a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3)}, \tag{109}$$

deren Verzweigungspunkte durch die Nullstellen von $\Phi_6(x)$ gegeben sind. In Analogie zu (101) führt die Substitution

$$z' = -\frac{3 a_2 z + 2 a_3}{4 a_3 z + 3 a_4} \tag{110}$$

die Funktion (109) in die inverse Funktion über. (109) ist aber nichts anderes als die Duplikaturformel der elliptischen Funktionen in (22). In der Variable z sind daher die Verzweigungspunkte von (109) durch die kubische Gleichung $R(z) = 0$ der Zweiteilung gegeben. Die Substitution (110) angewendet auf das unter (35) angegebene Verzweigungspolynom ($\nu = 6$) führt auf die Umformung

$$R_{(4)} = (4 a_3 x + 3 a_4 y)(a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3). \tag{111}$$

Nach Einführung der Größen q, h_2, h_3 und Reduktion des kubischen Polynoms gewinnt (111) die Gestalt

$$R_{(4)} = (x - q' y)(x^3 - 3 h_2 x y^2 - 2 h_3 y^3), \tag{112}$$

und zwar ist

$$q' = \frac{(q^2 + 3 h_2)^2 + 16 h_3 q}{4 (q^3 - 3 h_2 q - 2 h_3)}. \tag{113}$$

Die Gleichung (112) stimmt mit der für $n = 2$ in (83) gegebenen überein, so daß (113) den Zusammenhang zwischen Dieder- und Oktaedergleichung gibt. (113) ist mit der reduzierten Verdopplungsformel identisch.

In (12) ist eine Beziehung zwischen Vierteilungs- und Zweiteilungswerten angegeben. Werden die Vierteilungswerte, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders bilden, mit x_1 und x_2 bezeichnet, der Zweiteilungswert mit z_0, so lautet die Beziehung

$$x_1 + x_2 = 2 z_0. \tag{114}$$

Durch Anwendung der Substitution x^{-1} wird die Beziehung

$$x_1 x_2 = \frac{z_0}{z_0'} \tag{115}$$

gewonnen und hieraus vermöge (110) und der Gleichung $R(z_0) = 0$

$$\begin{aligned} -a_0 x_1 x_2 &= 2a_0 z_0^2 + 6a_1 z_0 + 3a_2, \\ a_0 (x_1 - x_2)^2 &= 12 (a_0 z_0^2 + 2a_1 z_0 + a_2), \end{aligned} \tag{116}$$

wodurch die Auflösung von $\Phi_6(x) = 0$ gegeben ist. Auch die Transformation von Φ_6 in sich, bei welcher die gegenüberliegenden Eckpunkte vertauscht werden, ergibt sich aus den Entwicklungen. Werden Zähler und Nenner in (109) differentiiert und für z der Wert in (114) eingesetzt, so resultiert eine kubische Transformation. Durch Anwendung der Substitution x^{-1} und Inversion der Indizes wird eine zweite kubische Transformation erhalten. Wir gelangen zu dem Ergebnis:

Das Oktaederpolynom Φ_6 geht durch die binäre Schar kubischer Transformationen

$$-x' = \frac{a_0 x^3 + 6a_1 x^2 + 9a_2 x + 4a_3}{3(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)} = \frac{3x(a_4 x^2 + 2a_3 x + a_2)}{4a_3 x^3 + 9a_4 x^2 + 6a_5 x + a_6} \tag{117}$$

unter Vertauschung der gegenüberliegenden Ecken in sich über.

l) Bemerkungen über das Tetraeder.

Eine den Funktionen (100) und (109) entsprechende rationale Funktion, deren Verzweigungspunkte bei $\Phi_4(x) = 0$ liegen, ist gegeben durch

$$z = \frac{a_0 x^3 - 3a_2 x - 2a_3}{3(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)}. \tag{118}$$

Die Verzweigungspunkte in z erfüllen eine algebraische Gleichung, welche mit der Hesseschen Kovariante Ψ_4 nicht übereinstimmt, aber in diese durch lineare Substitution in z übergeführt werden kann. Bei Einführung der Koeffizienten $b_0 : b_1 : b_2 \ldots$ [(40) bis (42)] berechnet sich die Substitution zu

$$z' = -\frac{b_1 z + b_2}{b_0 z + b_1}. \tag{119}$$

Die Transformationen, welche Φ_4 und Ψ_4 ineinander überführen, lassen sich vermittels der Invariantentheorie herleiten. Wir bilden zunächst durch Nullsetzen der ersten Polare von Φ_4 die rationale Funktion

$$z = -\frac{a_1 x^3 + 3a_2 x^2 + 3a_3 x + a_4}{a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3} \tag{120}$$

und setzen diese in $\Phi_4(z)$ ein. Sodann zerfällt $\Phi_4(z)$ in

$$\Psi_4^2(x) \cdot \Phi_4(x). \tag{121}$$

Durch Differentiationen ergibt sich aus (120) folgendes Resultat:

Die Nullstellen von $\Psi_4(x)$ werden durch die binäre Schar quadratischer Transformationen

$$-z = \frac{a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 \quad a_2 x^2 + 2a_3 x + a_4}{a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 \quad a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3} \tag{122}$$

in die Nullstellen von $\Phi_4(z)$ transformiert.

In dieser Schar sind auch lineare Transformationen enthalten, welche aber ausscheiden. Denn ein gemeinsamer Faktor in Zähler und Nenner ist auch Faktor von Ψ_4, so daß für diese Wurzel die Transformation ungültig wird. Aus (121) folgt noch für die kubische Transformation (120)

$$\frac{dz}{\sqrt{\Phi_4(z)}} = \sqrt{-3}\,\frac{dx}{\sqrt{\Phi_4(x)}}. \tag{123}$$

Die Entwicklungen über die Stufenzahlen 2, 3, 4, 5 gründen sich auf den Umstand, daß ein Galoisscher Hauptmodul vom Geschlechte Null existiert. Für die höheren Stufen besteht die Aufgabe, zu untersuchen, ob die in (6) genannte algebraische Beziehung in eine Ebene transformiert werden kann. Für das kogrediente Lösungssystem der sechsten, siebenten und achten Stufe trifft dies zu. Die Erörterung dieser Fälle ist Gegenstand einer späteren Mitteilung.

Das Anwendungsgebiet der Untersuchung ist, wie in der Einleitung bemerkt, die algebraische Theorie der reduzierbaren Integrale. Über dieses Ziel hinaus bilden die singulären Abelschen Integrale die naturgemäße Erweiterung der Untersuchung.

Berlin, den 30. November 1927.

(Eingegangen am 13. Januar 1928.)

Diophantische Untersuchungen über reduzierbare Abelsche Integrale.

Zweite Mitteilung.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

In der ersten Mitteilung[1]) wurde die Aufgabe, zwei Teilungsgleichungen der elliptischen Funktionen aufzustellen, welche denselben algebraischen Körper definieren, für die Stufen $n = 2, 3, 4, 5$ behandelt. Die vorliegende Mitteilung befaßt sich mit den partikulären Lösungen dieser Aufgabe, welche durch die Transformationsmoduln der elliptischen Funktionen gegeben sind. Die Untersuchung findet Anwendung in der Theorie der algebraischen Gebilde, welche unendlich viele reduzierbare Integrale enthalten.

a) Die Partikularlösung der Transformationsmoduln.

Eine diophantische Gleichung

$$y^3 - 3H_2 y - 2H_3 = \square \tag{1}$$

mit rationalen Zahlwerten H_2 und H_3 sei gegeben, welche vermittels einer rationalen Funktion m-ten Grades mit rationalen Koeffizienten

$$y = r_m(x) \tag{2}$$

in die diophantische Gleichung

$$x^3 - 3h_2 x - 2h_3 = \square \tag{3}$$

transformiert wird. Die n-ten Teilungsgleichungen der zu (1) und (3) gehörigen elliptischen Integrale erster Gattung definieren sodann denselben algebraischen Körper, vorausgesetzt, daß n prim zu m ist. Denn die Tschirnhaustransformation, welche die eine Teilungsgleichung in die andere überführt, ist für alle Gleichungen durch die rationale Funktion (2) gegeben. Die eingeführte Beschränkung auf rationale Koeffizienten ist für

[1]) Zitiert als „I".

das Folgende ausreichend, da nur Transformationsmoduln vom Geschlechte Null betrachtet werden. Bekanntlich besitzen die Transformationsgrade 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 18, 25 einen Hauptmodul vom Geschlechte Null[2]). Da der Teilungsgrad n keiner anderen Einschränkung unterliegt, als daß er zu der Stufe des Moduls teilerfremd ist, kann gefolgert werden, daß die Aufgabe, Teilungsgleichungen von gleicher Irrationalität zu finden, bis zu den höchsten Stufen rationale Lösungen besitzt, welche einen Parameter enthalten. Aber jeder der aufgeführten Moduln gehört nur einem der verschiedenen möglichen Lösungssysteme an. Die Bestimmung dieses Lösungssystems wird gegeben in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Um die für die vorliegende Entwicklung notwendigen Tatsachen aufzuführen[3]), so kann bei einer Transformation m-ten Grades unter den Periodenquotienten der elliptischen Integrale die Substitution

$$\omega' = m\,\omega \tag{4}$$

als bestehend angenommen werden. Bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen, welche die Relation $\alpha\delta - m\beta\gamma = 1$ erfüllen, und wird ω den unimodularen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ m\gamma & \delta \end{pmatrix}$ unterworfen, so erfährt auch ω' unimodulare Substitutionen, welche sich zu $\begin{pmatrix} \alpha & m\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ berechnen. Wir erhalten zwei Systeme von Transformationsgruppen, deren Substitutionen eindeutig einander zugeordnet sind. Aus der über die Teilungsgleichungen gemachten Bemerkung folgt nunmehr, daß diese Zuordnung auch innerhalb jeder Galoisschen Gruppe der n-ten Stufe eine holoedrisch isomorphe Zuordnung definiert, sobald n prim gegen m ist. Wir entnehmen aus (4), daß der Substitution $\omega + 1$ die Substitution $\omega' + m$ zugeordnet ist, und aus dieser Zuordnung läßt sich bereits das Lösungssystem bestimmen. Für die Stufen $n = 2$ und 4, welche nur ein Lösungssystem besitzen, können die aus den Transformationsmoduln ungerader Ordnung hervorgehenden Lösungen auch nur diesem System angehören, hingegen verteilen sich für $n = 3$ und 5 die Moduln auf das erste und zweite Lösungssystem, je nachdem m quadratischer Rest oder Nichtrest von n ist.

Für die Transformationsmoduln vom Geschlechte Null geht die Partikularlösung aus den für die Stufen $n = 2, 3, 4, 5$ entwickelten allgemeinen Lösungen in der Weise hervor, daß die Parameter a_0, a_1, a_2, a_3 [I, (15)] bzw. q, h_2, h_3 [I, (55)] ganze rationale Funktionen des Hauptmoduls t_m werden. Zwecks späterer Anwendungen sind diese Funktionen für die Ordnungszahlen $m = 2, 3, 4, 5, 6, 9, 16$ zu ermitteln.

[2]) Vgl. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen 2, S. 52, Gl. (14), (15).
[3]) Vgl. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen 2, Kap. 2 u. f.

b) Benachbarte sphärische Dreiecke und Modulargleichungen der regulären Körper.

Die Moduln t_2, t_3, t_4 stellen in Abhängigkeit vom Periodenquotient Dreiecksfunktionen dar, und die Untersuchung der durch diese Moduln gegebenen Partikularlösung steht in enger Beziehung zu den sphärischen Dreiecken, deren konforme Abbildung auf den Vollkreis durch algebraische Funktionen vermittelt wird. Allgemein stellen je zwei verwandte Dreiecke eine Partikularlösung dar. Diese Lösungen treten in den Anwendungen in mannigfacher Weise hervor, und ein Eingehen auf die einfachsten Fälle benachbarter Dreiecke erweist sich als notwendig. Bei Angabe der Winkel der Dreiecke wird im folgenden der Faktor π nicht aufgeführt. Wir betrachten folgende Serien benachbarter Dreiecke:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \Delta\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) \leftrightarrow \Delta\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{n-1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) && (n = 2, 3, 4, 5),\\
&\text{b)} \quad \Delta\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{n}\right) \leftrightarrow \Delta\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{n-2}{n}\right) && (n = 3, 4, 5),\\
&\text{c)} \quad \Delta\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\right) \leftrightarrow \Delta\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{n-2}{n}\right) && (n = 3, 4, 5),\\
(5) \qquad &\text{d)} \quad \Delta\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\right) \leftrightarrow \Delta\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n-2}{n}\right) && (n = 3, 4, 5),\\
&\text{e)} \quad \Delta\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{3}{n}\right) \leftrightarrow \Delta\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{n-3}{n}\right) && (n = 2, 4, 5),\\
&\text{f)} \quad \Delta\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{3}{n}\right) \leftrightarrow \Delta\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n-3}{n}\right) && (n = 2, 4, 5),\\
&\text{g)} \quad \Delta\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{4}{n}\right) \leftrightarrow \Delta\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n-4}{n}\right) && (n = 3, 5).
\end{aligned}
$$

Das erste Dreieck bezeichnen wir als das Ausgangsdreieck, das zweite als das resultierende Dreieck. Die algebraischen Funktionen, welche zwei verwandte Dreiecke konform aufeinander abbilden, werden durch Nullsetzen kogredienter Formen erhalten, und zwar je nach dem Werte von n durch Formen des Dieders, Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders. Zunächst einige Bemerkungen über die durch Polarenbildung gegebenen Verwandtschaften. Die Verwandtschaft (5a) ist durch die zweite Polare der Grundform f_y [I, (61)], die Verwandtschaft (5c) durch die dritte Polare gegeben. Die vierte Polare der Grundformen f_6 und f_{12} liefert die Verwandtschaften $n = 4$ und 5 in (5e). Der Fall $n = 2$ ist durch die kogrediente Form in (9e) gegeben. Die Verwandtschaften (5a) und (5e) unterscheiden sich für $n = 4$ nur durch Vertauschung der Dreiecke. Die Ausrechnung der zweiten bzw. vierten Polare von f_6 ergibt die äquianharmonische Gleichung

$$\mu^4 \mu' + 2\mu^3 \mu'^2 - 2\mu - \mu' = 0. \tag{6}$$

Die Verwandtschaft (5b) wird erhalten aus der quadratischen Polare der Hesseschen Kovariante von f_n. Für $n=3$ sind (5a) und (5b) identisch. Die abbildende Funktion wird für diesen Fall unter Einführung eines dritten Tetraedermoduls durch die symmetrischen Gleichungen gegeben

$$(7) \qquad \xi+\xi'+\xi''=0, \qquad \xi\xi'\xi''+2=0.$$

Die Verwandtschaften (5c bis g) stehen in enger Beziehung zu den Modulargleichungen der regulären Körper[4]) für die Transformationsgrade $m=2,3,4$. Die Verwandtschaften (5c) und (5d) sind dem Modul t_2 zugeordnet, da für $n=\infty$ das Ausgangsdreieck in dasjenige Dreieck übergeht, welches durch die Modulfunktion $t_2(\omega)$ auf die Halbebene abgebildet wird. In derselben Weise sind (5e) und (5f) dem Modul t_3 und (5g) dem Modul t_4 zugeordnet. Die Verwandtschaft (5d), $n=3$ führt das Ausgangsdreieck in sich über, desgleichen (5f), $n=4$ und (5g) $n=5$. Die abbildenden Funktionen sind durch die Modulargleichungen

$$(8) \quad \begin{aligned} &\text{d)} \quad \xi^3+\xi'^3-3(\xi\xi')^2+3\xi\xi'-2=0,\\ &\text{f)} \quad \mu^4\mu'^4+4\mu\mu'(\mu^2+\mu'^2)+6\mu^2\mu'^2+1=0,\\ &\text{g)} \quad [(\zeta\zeta')^5-1](\zeta-\zeta')+\zeta\zeta'(\zeta+\zeta')^4+(\zeta\zeta')^2(\zeta+\zeta')^2-2(\zeta\zeta')^3=0 \end{aligned}$$

der entsprechenden regulären Körper für die Transformationsgrade $m=2$, bzw. 3 und 4 gegeben. Die Gleichung (8d) ist in zueinander kontragredienten Variablen angegeben. Die Gleichung (8f), in einer der Variablen betrachtet, geht aus (6) durch Bildung der Hesseschen Kovariante hervor und ist als solche äquianharmonisch. Entsprechend sind die Nullstellen der Gleichung sechsten Grades in (8g) den Eckpunkten eines regulären Oktaeders projektiv.

Einen zweiten Typ von Modulargleichungen stellt die Gleichung (6) dar. Die Wurzeln der in μ' quadratischen Gleichung geben die Werte der beiden Moduln, welche durch Transformation dritten Grades ineinander übergehen. Die Elimination von μ liefert (8f). Auf denselben Typus von Modulargleichungen führen die Verwandtschaften (5e), $n=2$ und (5g), $n=3$:

$$(9) \quad \begin{aligned} &\text{e)} \quad \lambda^4-4\lambda^3\lambda'+6\lambda^2\lambda'-4\lambda\lambda'+\lambda'^2=0 \qquad (m=3),\\ &\text{g)} \quad \xi^6-3\xi^5\xi'+10\xi^3-15\xi^2\xi'+9\xi\xi'^2-2=0. \qquad (m=4). \end{aligned}$$

Die Verwandtschaft (5g), $n=3$ führt auf das Dreieck $\Delta(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ zurück, und das algebraische Gebilde in (9g) ist mit (7) identisch.

Alle Modulargleichungen von diesem Typus sind aufgezählt, wenn wir noch die Diedermodulargleichung für den siebenten Transformationsgrad

[4]) Elliptische Modulfunktionen 2, Kap. 4, S. 117.

hinzufügen[5]):

$$(10) \qquad (\lambda'-1)(\lambda'-\lambda^8)+\lambda'(\lambda-1)^8=0.$$

Die Modulargleichungen vom Geschlechte Null (8d) und (9e) können auch vermittels der Hauptmoduln in invarianter Gestalt gegeben werden.

c) Die Partikularlösung verwandter Dreiecke.

Die Verwandtschaft sphärischer Dreiecke ist vermittels der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \ldots$ darstellbar. Die Koeffizienten werden ganze rationale Funktionen eines Parameters t in der Weise, daß die beiden in bezug auf R bzw. $\Phi_4, \Phi_6, \Phi_{12}$ zueinander inversen Invarianten h und H [I, (56)], ausgedrückt durch diesen Parameter t, rationale Funktionen liefern, deren Verzweigungsschema der Zusammensetzung der beiden verwandten Dreiecke aus Elementardreiecken entspricht. Besonders hervorzuheben ist, daß für die unter (5a bis g) genannten Serien von Verwandtschaften, welche durch die verschiedenen Werte von n gegeben sind, die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in Abhängigkeit von t ein und dieselben Werte erhalten. Diese Eigenschaft besitzen nur eine beschränkte Anzahl von Verwandtschaften, so auch die in I, (64) angegebenen. Für jede Serie von Verwandtschaften kann unter den Koeffizienten eine zweifach homogene Bedingungsgleichung abgeleitet werden. Für die im folgenden aufgeführten in den Anwendungen wichtigen Fälle gewinnt diese Bedingungsgleichung eine sehr einfache Gestalt.

Ausgehend von der Bedingung $a_1 = 0$, welche die Polynome q_ν erfüllen und deren Koeffizientenschema in I, (49) mitgeteilt worden ist, erhalten wir durch Inversion an dem Zweiteilungspolynom R die Bedingung $a_2 = 0$, durch Inversion an Φ_4 die Bedingung $a_3 = 0$. Die Inversion von $a_2 = 0$ an Φ_6 ergibt $a_4 = 0$. Die Bedingungen $a_2, a_3, a_4 = 0$ stellen die Verwandtschaften (5a, c, e) dar, entsprechend der im vorigen Abschnitt an f_ν vorgenommenen Polarenbildung. Von den Polynomen, welche aus den angegebenen Operationen hervorgehen, notiere ich

$$(11) \qquad \begin{array}{ll} \text{a)} & 2x^3+3x^2-t \\ \text{b)} & x^4+2x^3-2tx-t \end{array} \Big\} \; a_2 = 0,$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & 3t_2^2x^4+8t_2x^3+6t_2x^2-1 \\ \text{d)} & x(t_2x^2+2x+1) \end{array} \Big\} \; a_3 = 0,$$

$$\begin{array}{ll} \text{e)} & 2t_3^2x^6+9t_3x^5+15t_3x^4+10t_3x^3-3x-1 \\ \text{f)} & 4t_3x^3+(3x+1)^2 \end{array} \Big\} \; a_4 = 0.$$

[5]) Der Übergang zur Gützlaffschen Modulargleichung folgt aus den Gleichungen

$$\lambda = \sqrt[8]{\lambda'\lambda''}, \qquad 1-\lambda = \sqrt[8]{(1-\lambda')(1-\lambda'')}.$$

Auf demselben Wege führt (9e) auf die Jacobische Modulargleichung.

Die Beziehungen zur absoluten Invariante h sind

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad h:1:h-1=1 && :(2t-1)^2 && :4t(1-t),\\ (12)\quad &\text{d)} && =(-3t_2+4)^3:(9t_2-8)^2 && :3^3t_2^2(1-t_2),\\ &\text{f)} && =(-8t_3+9)^3:(8t_3^2-36t_3+27)^2:2^6t_3^3(1-t_3). \end{aligned}$$

Das Polynom (11a) wird durch die simultanen Substitutionen

$$x=-x'-1, \qquad t=1-t', \tag{13}$$

vom Faktor -1 abgesehen, in sich übergeführt. Dies gilt auch für das demselben Koeffizientenschema angehörende Tetraederpolynom (11b) zufolge der Kovarianz bei ganzen linearen Substitutionen [I, Abschn. d)]. Die Bedingung des Schemas $a_2=0$ geht aber bei Inversion an Φ_4 in sich über. Demzufolge geht (11b) auch durch

$$x=\frac{1}{x'}, \qquad t=\frac{1}{t'} \tag{14}$$

in sich über. Das Polynom (11b) geht in eine kogrediente Form des Dieders über, wenn x durch $-x$ ersetzt wird. Die Hessesche Kovariante von (11b) liefert die Koeffizienten der Verwandtschaft (5b) und ist als Diederform mit (9e) identisch. Die Teilungspolynome R und Φ_4 werden reduzibel, wenn a_3 bzw. a_4 verschwindet. Somit stellen die Polynome (11d) und (11f) Normalformen für die Moduln t_2 und t_3 dar. Der Übergang zum transformierten Modul ist durch $1-t$ gegeben, wie aus (12d) und (12f) ersichtlich. Über die Polynome (11c) und (11e) läßt sich sodann folgender Satz aufstellen:

Die Dreiteilungsgleichung (11c) zweiter Stufe geht durch die simultanen Substitutionen

$$x=\frac{x'}{x'+1}, \qquad t=1-t' \tag{15}$$

in die Hessesche Kovariante über, die Vierteilungsgleichung (11e) dritter Stufe geht durch dieselben Substitutionen in sich über. Die erste Behauptung folgt aus den Substitutionen in I, (66), welche φ_4 in ψ_4 überführen, die zweite aus (13), da das zu (11e) inverse Polynom zur Serie $a_2=0$ gehört. Ein ähnlicher Satz gilt für die Zweiteilungsgleichung dritter Stufe in (11f), welche vermittels der simultanen Substitutionen

$$x=\frac{-x'}{4x'+1}, \qquad t_3=1-t_3' \tag{16}$$

in sich selbst übergeht. Dieses Resultat läßt eine einfachere Auffassung zu. Die Variable x der Zweiteilungsgleichung, als Hauptmodul t_6 gedeutet, substituiert sich beim Übergang zum transformierten Modul t_3' ebenfalls linear.

Den Verwandtschaften (5d) und (5f) entsprechen für $n = 3$ bzw. 4 die symmetrischen Modulargleichungen (8d) und (8f). Die Koeffizientenschemata dieser Verwandtschaften werden daher erhalten, wenn die Substitution in x in (15) durch die ganze Substitution

$$x = -x' - 1 \tag{17}$$

in die Inversion x^{-1} transformiert wird. Die Bedingungsgleichungen der Schemata berechnen sich zu

$$2a_2^3 - 3a_1a_2a_3 + a_0a_3^2 = 0, \tag{18}$$

$$a_2a_4 - a_3^2 = 0. \tag{19}$$

Die zweite Gleichung geht durch Inversion an Φ_6 in sich über. Die erste Gleichung läßt sich durch Einführung der Koeffizienten b_1 und b_2 in I, (42) in die Form

$$a_2b_2 - a_3b_1 = 0 \tag{20}$$

umsetzen. Die Gleichung geht bei Vertauschung der Koeffizienten von Φ_4 und Ψ_4 und Inversion an Φ_4 und Ψ_4 in sich über, entsprechend den allgemeinen Angaben im Abschnitt a), nach welchen der Modul t_2 eine Partikularlösung des zweiten Lösungssystems für $n = 3$ erzeugt.

Der Verwandtschaft (5g), $n = 5$ entspricht die symmetrische Modulargleichung (8g). Die Bedingungsgleichung $a_6 = 0$, welche diese Verwandtschaft darstellt, geht daher durch Inversion an Φ_{12} in sich über [vgl. I, (101)] und definiert zugleich den Modul t_4. Das Koeffizientenschema kann aus der Verwandtschaft (5g), $n = 3$ derselben Serie abgeleitet werden. Das resultierende Dreieck dieser Verwandtschaft ist mit dem Ausgangsdreieck der Verwandtschaft (5a) identisch. Somit läßt sich das dem Schema $a_6 = 0$ enthaltene Tetraederpolynom in das Polynom (11b) durch Inversion x^{-1} und Anwendung einer linearen ganzen Substitution überführen [vgl. die rechte Seite von (25)]. Zunächst werde (11b) durch Ausübung der Substitution $x = \frac{1}{2}(x' - 1)$ reduziert:

$$x^4 - 6x^2 - 8x(2t - 1) - 3. \tag{21}$$

Durch Inversion gelangen wir zu der Normalform vierter Stufe

$$x[(x-1)^2 + 4t_4x]. \tag{22}$$

Der Vergleich mit (11d) ergibt

$$t_2 = (2t_4 - 1)^{-2}. \tag{23}$$

Die simultanen Substitutionen

$$x = -x', \quad t_4 = 1 - t_4 \tag{24}$$

führen (21), (22), (23) in sich über. Die gesuchte durch $a_6 = 0$ definierte Normalform unterscheidet sich von (22) um eine ganze Substitution. Diese wird nunmehr folgendermaßen gefunden. Zufolge (14) gibt es noch einen zweiten Übergang von (11b) zu (22). Die Substitutionen x^{-1}, $2x+1$, welche (22) über (21) auf (11b) zurückführen, setzen wir mit x^{-1} in (14) zusammen

$$\frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{-(x'+2)} \tag{25}$$

und folgern, daß die gewünschte Normalform durch Anwendung der ganzen Substitution

$$x = 2x' + 1 \tag{26}$$

aus (22) erhalten wird.

$$(2x+1)(x^2 + 2t_4 x + t_4). \tag{27}$$

Aus dieser Normalform ergibt sich das Koeffizientenschema $a_6 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2t & -3t^2 \\ 4t+1 & t & -4t^2 \\ 4t & -t^2 & -t^2(t+4) \\ 3t & -2t^2 & -6t^3 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Das Schema wird durch Inversion der Koeffizienten und Anwendung der Substitution t_4^{-1} in sich übergeführt. Ferner wird (24) durch (26) in $x-1$, $1-t_4$ transformiert, so daß (28) durch dieselben Diedersubstitutionen in sich übergeführt wird wie (11b). Die Substitution t_4^{-1} bedeutet den Übergang zum transformierten Modul, wie durch Einsetzen von (23) in (12d) bestätigt werden kann.

d) Digredient verwandte Dreiecke.

Jedem der abgeleiteten Koeffizientenschemata läßt sich das Koeffizientenschema des digredienten Polynoms Ψ_{12} [vgl. I, (99)] zuordnen. Auch diese Schemata stellen, sobald wir uns auf den Fall $n = 5$ beschränken, eine Verwandtschaft unter sphärischen Dreiecken dar. Das Ausgangsdreieck dieser Verwandtschaft ist in derselben Weise aus Dreiecken $\Delta(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ zusammengesetzt, wie das Ausgangsdreieck der ursprünglichen Verwandtschaft aus Elementardreiecken. Diese geometrische Definition ist darin begründet, daß in der zugeordneten rationalen Funktion der ursprünglichen Ausgangsdreiecke bei $h = 1$ nur Eckpunkte des Dreiecks gelegen sind [vgl. (12)]. Die Winkel des Ausgangsdreiecks werden also gefunden, indem diejenigen Winkel des ursprünglichen Ausgangsdreiecks verdoppelt werden, welche ein

Vielfaches von $\frac{\pi}{5}$ betragen. Das resultierende Dreieck wird in jedem Falle erhalten, wenn das für die ursprüngliche Verwandtschaft gegebene Gesetz der Winkelbildung in Anwendung gebracht wird. Zur Nachprüfung dieser Behauptung ist in jedem Falle die Teilbarkeit der Koeffizienten von Ψ_{12} durch t und $t-1$ zu untersuchen, ferner der Grad der Restfunktionen zu bestimmen. Die resultierenden Dreiecke stellen wir den ursprünglichen Ausgangsdreiecken in (5a) bis (5g) gegenüber und erhalten folgende digrediente Verwandtschaften:

$$\text{a)}\quad \Delta\left(\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)\leftrightarrow\Delta\left(\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right),$$

$$\text{b)}\quad \Delta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right)\leftrightarrow\Delta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right),$$

$$\text{c)}\quad \Delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)\leftrightarrow\Delta\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right),$$

(29)

$$\text{d)}\quad \Delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)\leftrightarrow\Delta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right),$$

$$\text{e)}\quad \Delta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)\leftrightarrow\Delta\left(\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right),$$

$$\text{f)}\quad \Delta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)\leftrightarrow\Delta\left(\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right),$$

$$\text{g)}\quad \Delta\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)\leftrightarrow\Delta\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right).$$

Die Abbildungsfunktionen sind durch digrediente Formen gegeben. Für die Verwandtschaft (29a) ergibt sich

$$(30)\quad 5\zeta'^2\zeta^3(\zeta^5-2)+\zeta'(\zeta^{10}-14\zeta^5-1)+5\zeta^2(2\zeta^5+1)=0.$$

Die Abbildung von (29c) und (29f) leisten die Ikosaedermodulargleichungen für den zweiten und dritten Transformationsgrad usw.

Zu bemerken ist, daß die Gesamtheit der kogredient und digredient verwandten Dreiecke ein und dasselbe algebraische Gebilde definieren. Daher werden bei der konformen Abbildung sphärischer Dreiecke auf den Vollkreis auch nur sieben verschiedene algebraische Gebilde vom Geschlechte $p>0$ gefunden. Von diesen hat (7) das Geschlecht $p=1$ und besitzt komplexe Multiplikation, während für die übrigen Gebilde $p>1$ ist, aber ihre transzendenten Moduln lassen sich sämtlich durch elliptische Moduln ausdrücken, worauf ich bei anderer Gelegenheit zurückkomme.

Die digredienten Verwandtschaften (29a) und (29b) führen auf die rationalen Funktionen zehnten und sechsten Grades, welche F. Klein aufgestellt hat[6]). Die Berechnung ist leicht durchführbar, sobald man be-

[6]) Math. Annalen **12** (1877), S. 167.

achtet, daß Φ_{12} und Ψ_{12} in bezug auf ganze Substitutionen kovariant sind. Die rationalen Funktionen werden sogleich in einer einheitlichen Normierung erhalten. Die digrediente Verwandtschaft (29c) kann dazu dienen, die rationale Funktion siebenten Grades herzuleiten, aus welcher das Polynom Ψ_{12} gewonnen wurde [I, (70)]. Zunächst ist das Koeffizientenschema der kogredienten Verwandtschaft

$$(31) \qquad \Delta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \leftrightarrow \Delta\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

zu ermitteln. Dieses Schema erzeugt die Normalform zweiter Stufe

$$(32) \qquad (x+1)\,(x^2 - t_2'),$$

welche bereits den transformierten Modul enthält. Das Schema berechnet sich zu

$$(33) \qquad \begin{pmatrix} 3 & -t(t+4) & -3t^2(13t^2-24t+16) \\ 1 & -t(3t+4) & -t^2(5^2t^3+2^3\cdot 3^2t^2 \quad 2^4\cdot 13t + 2^7) \\ -t & t^2(t-12) & -t^2(5\cdot 31t^3 - 2^3\cdot 7t^2 - 2^4\cdot 3\cdot 7t + 2^8) \\ -3t & -t^2(5t^2-8t+16) & 3t^3(5^3t^3 - 2^2\cdot 173t^2 + 2^4\cdot 3^2\cdot 7t - 2^6\cdot 7) \end{pmatrix}$$

Dieselben Substitutionen, welche das erststufige Verzweigungspolynom I, (45) in die Normalform zweiter Stufe (11d) überführen,

$$(34) \qquad h_2 = -3t+4, \qquad h_3 = 9t-8;$$

$$(35) \qquad x = 3tx' + 2$$

führen das digrediente Verzweigungspolynom I, (74) in das zu (32) inverse Polynom über. Durch Umkehrung der Operationen (34) und (35) wird aus den Koeffizienten der letzten Spalte in (33) das digrediente Polynom I, (74) gewonnen.

e) Der Modul t_6.

Der Modul t_6 ist nur für die fünfte Stufe zu untersuchen. Er erzeugt eine Partikularlösung, welche dem kogredienten Lösungssystem angehört. Wie in (16) bemerkt, kann der Modul t_6 aus der Normalform dritter Stufe (11f) abgeleitet werden. Nach Einführung von t_6 geben wir dem Polynom (11f) die Gestalt

$$(36) \qquad (t_6 x + 1)\,[(2x-1)^2 + t_6 x].$$

Die Beziehung zwischen der absoluten Invariante h und dem Modul t_6 ist durch eine rationale Funktion zwölften Grades gegeben. Die Aufgabe, die bezüglich Φ_{12} inverse Funktion niedersten Grades aus (36) abzuleiten, führt auf eine Funktion zwölften Grades, welche notwendig die gesuchte

Lösung ist. Das Resultat geben wir in folgender Gestalt. Vermittels der Substitutionen

$$x = x' + 1, \qquad t_6 = \frac{1}{t_6' - 1} \tag{37}$$

geht (36) über in

$$(x + t_6)\,[(t_6 - 1)\,(2x + 1)^2 + x + 1]. \tag{38}$$

Die Koeffizienten dieses Polynoms liefern das Ikosaeder.

$$\begin{pmatrix} 12(t-1) & 4t^2 & 9t^4 \\ 4t^2 - 3 & t^2(2t+3) & 2t^4(-4t+9) \\ 2t(2t-1) & t^3(4t+3) & t^4(-16t^2+27) \\ 3t^2 & 8t^4 & 12t^5(-8t+9) \end{pmatrix}, \tag{39}$$

welches durch die Substitutionen

$$2xx' = 3, \qquad 8tt' = 9 \tag{40}$$

in sich übergeht. Der Oktaederkoeffizient a_6 berechnet sich zu $6t_6^3$. Aus den Beziehungen

$$a_6^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot t_6^6, \qquad a_4 a_8 = 2^5 \cdot t_6^6, \qquad a_3 a_9 = 3^3 \cdot t_6^6 \tag{41}$$

gewinnen wir die Bedingungsgleichungen

$$9a_4 a_8 - 8a_6^2 = 0, \qquad 4a_3 a_9 - 3a_6^2 = 0. \tag{42}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich die in I, (104) mitgeteilte, jedoch nicht abgeleitete quadratische Koeffizientenrelation, sobald man beachtet, daß die Summe der Zahlenkoeffizienten in diesen Relationen Null ist.

f) Die Moduln t_9, t_{16}.

Sehr einfache Verhältnisse finden wir bei den Moduln t_9 und t_{16} von quadratischer Ordnungszahl vor. Diese Moduln gehören dem kogredienten Lösungssystem an. Die Beziehungen zu den Moduln t_3 und t_4 sind gegeben durch die Gleichungen

$$t_3 = t_9^{-3}, \qquad t_4 = t_{16}^4. \tag{43}$$

Jede dieser Gleichungen besitzt lineare Transformationen in sich, und die Zusammensetzung dieser mit der gesuchten Transformation führt auf eine Tetraeder- bzw. Oktaedergruppe von Transformationen. Die Teilungsgleichungen werden sich daher in kogrediente Tetraeder- bzw. Oktaederformen überführen lassen. Diederformen von solcher Art sind durch (11 b) und (28) gegeben. Die Herleitung der Tetraederformen gebe ich ausführlich. Vermittels der Substitutionen

$$x = t_9 x', \qquad t_3 = t_9^{\,3} \tag{44}$$

geht die Normalform dritter Stufe in (11f) über in

$$4x^3 + (3t_9 x + 1)^2. \tag{45}$$

Nach Anwendung der Substitutionen

$$x = x' - 1, \quad t = t' + 1 \tag{46}$$

liefert (45) ein Ikosaeder, welches durch die Substitutionen

$$x x' = 3, \quad t t' = 3 \tag{47}$$

in sich übergeführt wird. Wir folgern daraus, daß das Ikosaeder $a_4 = 0$ nach Anwendung der Substitutionen

$$x = -\xi\xi', \quad t_3 = \xi'^{-3} \tag{48}$$

in die kontragrediente Tetraederform

$$\xi^{12} - 9\xi^{11}\xi'^2 + 33\xi^{10}\xi' - 55\xi^9 + * + \ldots + 3\xi\xi'(27\xi'^3 - 20) - (27\xi'^3 - 25) \tag{49}$$

übergeht. In der Variable ξ' steigt diese bis zum vierten Grade an.

Die Vierteilungsgleichung (11e) wird durch die Substitutionen

$$x = -\xi' : \xi, \quad t_3 = \xi'^{-3} \tag{50}$$

in die kogrediente Tetraederform (9g) übergeführt.

Im Falle der Zweiteilung ist das Polynom (11a) heranzuziehen, welches durch die Substitutionen

$$x = \xi : 2\xi', \quad t_3 = \xi'^{-3} \tag{51}$$

in die erste Polare von f_4 übergeht.

Für den Modul t_{16} haben wir die Ergebnisse:

Das Tetraederpolynom (11b) geht durch die Substitutionen

$$x = \mu' : \mu, \quad t_4 = \mu'^4 \tag{52}$$

in die zweite Polare von f_6 in (6) über, hingegen wird durch

$$x = -\mu' : \mu, \quad t_4 = \mu'^4 \tag{53}$$

das Ikosaeder (28) in eine kogrediente Oktaederform übergeführt,

$$\mu^{12}\mu'^3 - 2\mu^{11}(\mu'^4 + 4) \ldots + 2\mu(4\mu'^4 + 1)\mu'^2 - \mu'^3, \tag{54}$$

welche in μ' bis zum sechsten Grade ansteigt.

g) Der Modul t_5.

Den einfachsten rein algebraischen Zugang zu dem Modul t_5 gibt die geschlossene Fermatische Kette[7]) fünfter Ordnung

$$s x y (x y - 1) = (x - 1)(y - 1), \tag{55}$$

[7]) Auf diesen Gegenstand komme ich in anderem Zusammenhang zurück.

in welcher s einen Parameter bedeutet. Für einen beliebigen Wert von x sind die benachbarten Werte der Kette durch die Wurzeln der quadratischen Gleichung in y gegeben. Für $x = \infty$ erhalten wir die nach beiden Richtungen hin symmetrische Kette

$$\infty, 0, 1, 1, 0, \infty, 0 \ldots . \tag{56}$$

Überspringen wir je ein Glied, so erhalten wir die Kette

$$\infty, 1, 0, 0, \ldots, \tag{57}$$

welche durch die Substitution

$$x = 1 - x' \tag{58}$$

in die ursprüngliche Kette (56) übergeht. Der Parameter s erleidet hierbei eine lineare Substitution. Zur Ermittlung dieser Substitution berechnen wir zunächst das Verzweigungspolynom, welches sich durch Auflösung von (55) nach einer der Variablen

$$(s x + x - 1)^2 - 4 s x^2 (x - 1) \tag{59}$$

ergibt. Vermittels der Substitution

$$x = \frac{1}{2}(x' + 1) \tag{60}$$

wird (58) in $x = -x'$ transformiert und (59) in das Polynom

$$-2 s x^3 + (s^2 + 1) x^2 + 2 (s^2 + s - 1) x + (s^2 + 1), \tag{61}$$

welches durch die simultanen Substitutionen

$$x = -x', \qquad s = -\frac{1}{s'} \tag{62}$$

in sich übergeführt wird. Vermittels der Substitutionen

$$x = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right) x', \qquad \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) = t_5 \tag{63}$$

gelangen wir zu einer Normalform für den Transformationsmodul t_5:

$$-x^2 (x - 1)(t_5^2 + 1) + x (2 t_5 + 1) + 1. \tag{64}$$

Die Periodenteilwerte 1, 0 in der Kette (56) werden durch (60) in die Werte 1, -1 übergeführt. Da das arithmetische Mittel aus diesen Werten gleich Null ist, so verschwindet für das Verzweigungspolynom (61) bzw. (64) der letzte Koeffizient a_6' der Modularresolvente I, (30). Das Koeffizientenschema $a_6' = 0$ berechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} -6s & 2(2s+1)(s-2) & -3\cdot 5^3 (s^2+1) \\ s^2+1 & 5(s^2+1) & -2\cdot 5^2 (19 s^2 - 41 s - 19) \\ 2(s^2+s-1) & -5^2 (s^2+1) & -5^5 (s^2+1) \\ 3(s^2+1) & -10(3s+4)(4s-3) & -6\cdot 5^3 (11 s - 2)(2s+11) \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Das durch (65) gegebene Ikosaeder hat die Eigenschaft, sowohl durch (62) als auch durch

$$(66) \qquad x\,x' = 5, \qquad s = \frac{-11s'+2}{2s'+11}$$

in sich überzugehen. Bei der Zerfällung des Ikosaeders in Faktoren läßt sich der Unterschied gegenüber der Periodenteilungsgleichung aufweisen. Das Ikosaeder enthält den Faktor (x^2-5), hingegen die Teilungsgleichung die rationalen Faktoren $(x-1)$ und $(x+1)$. Aber das arithmetische Mittel der Nullstellen ist in beiden Fällen Null, und da dieses eine Kovariante gegenüber ganzen linearen Substitutionen ist, können wir folgern, daß für das Ikosaeder das arithmetische Mittel aus den Nullstellen zweier gegenüberliegender Eckpunkte auf dieselbe in I, (30) hergeleitete Modularresolvente sechsten Grades führt[8]).

Zur Untersuchung der Vierteilungsgleichung notieren wir vorerst die Resolvente der Periodenfünfteilung

$$(68) \qquad h:1:h-1 = (s^4+12s^3+14s^2-12s+1)^3 : (s^2+1)^2\cdot(s^4+18s^3+74s^2-18s+1)^2 : -12^3 s^5(s^2-11s-1)$$

und errechnen den letzten Oktaederkoeffizienten des Schemas (65) zu

$$(69) \qquad a_6 = 6(s^2+11s-1).$$

Dieses quadratische Polynom ist in (68) bei $h-1$ in erster Potenz enthalten. Wir folgern, daß es in der bezüglich Φ_6 inversen Funktion in ungerader Potenz, deren Exponent größer als vier ist, also zur fünften Potenz eingeht. Somit besitzt die inverse Funktion dieselbe Verzweigung wie (68). In Übereinstimmung hiermit ist die Bedingung $a_6' = 0$ zufolge I, (31) auch bezüglich Φ_6 zu sich selbst invers, und das in dem Schema (65) enthaltene Oktaeder geht sowohl durch (62) als auch durch

$$(70) \qquad x\,x' = \sqrt{5}, \qquad 2ss' + (s+s')(11+5\sqrt{5}) - 2 = 0$$

in sich über. Der Modul der inversen Funktion steht mit dem Ikosaedermodul in der einfachen Beziehung

$$(71) \qquad s = \zeta^5.$$

Für den Modul t_5 gewinnt man folgenden

[8]) Aus den Periodenteilwerten ergibt sich der Zusammenhang

$$(67) \qquad z = -(s^2+1)\frac{h_2}{h_3} = \frac{t_5^2+6t_5+4}{t_5^2+9t_5+19}$$

zwischen der Wurzel der reduzierten Resolvente und dem Modul t_5.

Satz. *Das Oktaeder fünfter Stufe*

$$(72)\quad -x^6+2(t^2+1)x^5+5(t^2+1)(2t+1)x^4+20(t^2+1)^2x^3 + 5(t^2+1)^2(4t-3)x^2+10(t^2+1)^3x+(t^2+1)^3(2t-11)$$

geht durch die Transformation

$$(73)\qquad 5^2xx'+\frac{1}{2}(t+t')=0,\qquad 2tt'-11(t+t')-2=0$$

in sich über. Der Modul t_5' bedeutet den transformierten Modul.

Für den Fall $n=2$ kann der Umstand benutzt werden, daß der zehnte Transformationsgrad einen Modul vom Geschlechte Null besitzt. Das Zweiteilungspolynom (64) vereinfachen wir vermittels der Substitution

$$(74)\qquad x=\frac{-1}{x'+t_5+1}$$

und sprechen das Resultat aus:

Das Zweiteilungspolynom fünfter Stufe

$$(75)\qquad x^3+x^2(t_5+2)+2x+2$$

geht durch die simultanen Substitutionen

$$(76)\qquad x=\frac{-x'+2}{2x'+1},\qquad t_5=\frac{-11t_5'+2}{2t_5'+11}$$

in sich über.

Im Falle $n=3$ ist der transformierte Modul in der Hesseschen Kovariante des Tetraederpolynoms enthalten. Es erübrigt sich auf diesen Fall einzugehen, da wir später ein algebraisches Gebilde $p=2$ mit unendlich vielen reduzierbaren Integralen aufstellen werden, welches die Fälle $n=2$ und 3 zugleich enthält.

h) Bemerkung zur Transformation zweiten und dritten Grades.

Sobald der Teilungsgrad n zu dem Transformationsgrad m teilerfremd ist, stellt die rationale Funktion, welche die elliptischen Integrale ineinander überführt, die Tschirnhaustransformation der Teilungsgleichungen dar [Abschnitt a)]. Im Falle $n=3$ und 4 ist die Teilungsgleichung ein Tetraeder- bzw. Oktaederpolynom, und an Stelle der rationalen Funktion wurde eine lineare Substitution verwendet. Wird diese Substitution auf eine der Variablen der rationalen Funktion ausgeübt, so wird im Falle der Dreiteilung, wenn $m\equiv 1\pmod 3$ ist, eine Transformation der Tetraedergleichung in sich erhalten, wenn $m\equiv 2\pmod 3$ ist, eine Transformation in die Hessesche Kovariante. Im Falle der Vierteilung wird eine Transformation der Oktaedergleichung in sich erhalten, welche für $m\equiv 3\pmod 4$ die gegenüberliegenden Eckpunkte des Oktaeders vertauscht. Das Ikosaeder

läßt sich indessen nicht heranziehen, da es nur einen Ersatz für die Teilungsgleichung darstellt. Bemerkenswert sind die Fälle $m = 2$, $n = 3$ und $m = 3$, $n = 4$, welche näher ausgeführt werden.

Das elliptische Integral zweiter Stufe

$$\int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt{t_2 y^3 + 2y^2 + y}} \tag{77}$$

geht durch die quadratische Transformation

$$y = \frac{t_2 x^2 - (x+1)^2}{2 t_2 x} \tag{78}$$

über in das Integral

$$\sqrt{-2} \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{t_2' x^3 + 2x^2 + x}}. \tag{79}$$

Durch Anwendung der Substitution (15)

$$x = \frac{-x'}{x'+1} \tag{80}$$

auf die Variable x in (78) wird eine der quadratischen Transformationen erhalten, welche das Tetraederpolynom der Dreiteilung in die Hessesche Kovariante überführt:

$$y = \frac{-t_2 x^2 + 1}{2 t_2 x (x+1)}. \tag{81}$$

Durch Inversion gelangen wir zu den Polynomen q'_4 und q'_4 zurück, so daß (81) rational in die allgemeine Formel I, (122) übergeführt werden kann.

Die Formeln für den dritten Transformationsgrad entsprechen völlig den Gleichungen (77) bis (79). Die transformierende Funktion lautet:

$$y = \frac{t_3 x^3 - (x+1)^3}{3 t_3 x^2}. \tag{82}$$

Durch Anwendung der Substitution (80) erhalten wir die kubische Transformation

$$y = \frac{-t_3 x^3 - 1}{3 t_3 x^2 (x+1)}, \tag{83}$$

welche das Oktaederpolynom der Vierteilung unter Vertauschung der gegenüberliegenden Eckpunkte in sich überführt.

Eine zweite Transformation wird erhalten, wenn wir in (82) den transformierten Modul einführen und die Variable y nach (80) substituieren. Durch Kombination dieser Transformation mit (83) ergibt sich die einfachere Transformation

$$y = \frac{3x(x+1)}{2 t_3 x^3 - 3x - 1}. \tag{84}$$

In die allgemeine Formel I, (117) lassen sich (83) und (84) nicht mehr rational überführen, da das Galoissche Problem der Oktaedergleichung des Moduls t_3 durch das hyperelliptische Gebilde (6) gegeben ist. Aber vermittels der quadratischen Funktion (12) kann man zur allgemeinen Formel gelangen.

Zusatz vom 10. 10. 1928. Durch die Entwicklungen dieser Abhandlung bin ich zu einer Methode gelangt, die erststufigen Modulargleichungen auf algebraischem Wege aufzustellen.

Berlin, den 28. April 1928.

(Eingegangen am 1. Mai 1928.)

Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen Orthogonalfunktionen.

Von

U. Kowallik in Breslau.

Einleitung.

Das Problem der Entwicklung einer beliebig gegebenen Funktion nach Hermiteschen Polynomen bzw. Hermiteschen Orthogonalfunktionen ist bereits von verschiedener Seite in Angriff genommen und gelöst worden, in der neueren Zeit haben daran besonders R. Neumann und G. Szegö gearbeitet.

R. Neumann[1]) erhält auf Grund der Theorie der Integralgleichungen das Ergebnis:

Es sei $f(x)$ im Grundgebiete $-\infty \ldots +\infty$ von beschränkter Schwankung, außerhalb eines Intervalles $\alpha < x < \beta$ zweimal stetig differenzierbar, ferner sei

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

und es existiere

$$\int [(1+x^2) f(x) - f''(x)]^2 \, dx,$$

wobei über das ganze Grundgebiet $-\infty \ldots +\infty$ mit Ausnahme der Strecke $\alpha < x < \beta$ zu integrieren ist. Dann konvergiert die Reihenentwicklung $\sum_n a_n \varphi_n(x)$ gegen den Wert

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

G. Szegö[2]) greift die Aufgabe in allgemeinerer Form an, indem er mit Benutzung des Summabilitätsbegriffs die Reihendarstellung einer Funktion nach den allgemeinen Laguerreschen Polynomen mit zwei Indizes ins Auge faßt. Der entsprechende Entwicklungssatz für die Hermiteschen Polynome, der uns bei G. Szegö als Spezialfall umfassenderer Resultate entgegentritt, lautet in abgekürzter Gestalt:

[1]) R. Neumann, Diss., Breslau 1912, S. 93.

[2]) G. Szegö, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 87–115.

Es sei $f(x)$ eine integrierbare Funktion, deren Verhalten für große Argumente x durch die Beziehung

$$\lim_{x \to \infty} (x^{-m} e^{\frac{1}{2}x^2} f(x)) = 0$$

charakterisiert sei. Dann konvergiert die Reihenentwicklung von $f(x)$ nach Hermiteschen Orthogonalfunktionen, gewisse Stellen ausgenommen, und besitzt den Wert

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Der Verfasser dieser Arbeit hat sich nun zur Aufgabe gesetzt, das Problem ohne Benutzung des Summabilitätsbegriffs allein mit Hilfe der gewöhnlichen Dirichletschen Methode zu lösen, wie sie bei den Fourierreihen mit Erfolg angewendet wird. Es wird also die Summe der ersten n Glieder gebildet und man versucht darauf, den Grenzwert des auftretenden Integrals für wachsendes n zu bestimmen. Schon W. Stekloff[3]) hat, auf diesem Gedanken fußend, die Reihenentwicklung nach Polynomen verschiedener Art behandelt. Seine Resultate glaubt er auch auf die Hermiteschen Polynome anwenden zu dürfen. Indem er sich aber hierbei auf Arbeiten von Darboux[4]) beruft, übersieht er, daß in diesen Ausführungen wesentlich von der Endlichkeit des Grundgebietes Gebrauch gemacht wird. Die Kritik an den oben genannten Behauptungen von W. Stekloff haben den Ausgangspunkt zur vorliegenden Arbeit gebildet.

Das Ergebnis, zu dem der Verfasser kommt, lautet:

Die Reihenentwicklung nach Hermiteschen Orthogonalfunktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\varphi_n(\alpha)\,d\alpha$$

ist konvergent und hat den Wert

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

sofern $f(x)$ in jedem Intervalle $g \ldots + g$ von beschränkter Schwankung ist und das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f^2(x)\,dx$$

existiert.

G. Szegö kommt mit der Integrierbarkeit der Funktion aus, während er bezüglich des Verhaltens für große Argumente weitergehende Ansprüche

[3]) Mitteilungen von Charkow, **10** (1909), S. 131.

[4]) Journal de Mathématiques (Liouville), (3) **4** (1878), S. 5 u. 377.

an die Funktion $f(x)$ stellt (beim Nebeneinanderstellen der Resultate beachte man, daß G. Szegö nach Polynomen, während der Verfasser nach Orthogonalfunktionen entwickelt). Für

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+k}} \qquad (k > 0)$$

z. B. läßt sich aus den Erörterungen von G. Szegö die Konvergenz nicht ableiten, während auf Grund der Ergebnisse des Verfassers die Konvergenzfrage in bejahendem Sinne beantwortet werden kann.

Am Schluß der folgenden Ausführungen wird das erhaltene Resultat herangezogen, um die Konvergenz zweier Reihenentwicklungen nachzuweisen, die von Bruns[5]) in seinem Werke über Kollektivmaßlehre aufgestellt sind und die für diese Disziplin fundamentale Bedeutung haben.

§ 1.

Erste Approximation der Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ für große n.

Die Hermiteschen Polynome genügen bekanntlich der Differentialgleichung

$$H_n'' - 2x H_n' + 2n H_n = 0. \tag{1}$$

Als die dazugehörige zweigliedrige Normalform ermittelt man leicht die Gleichung

$$\varphi_n'' + (2n + 1 - x^2)\varphi_n = 0, \tag{2}$$

worin

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}} \tag{3}$$

die n-te normierte Orthogonalfunktion darstellt. Im folgenden werden wir noch von einer Anzahl anderer Relationen öfter Gebrauch machen, die wir daher bei dieser Gelegenheit zusammenstellen wollen[6]). Es sind dies die Rekursionsformeln

$$H_{n+1} = 2x H_n - 2n H_{n-1}, \tag{4}$$

$$H_n' = 2n H_{n-1} \tag{5}$$

oder, als Relation zwischen den $\varphi_n(x)$ aufgeschrieben,

$$\varphi_n' + x\varphi_n = \sqrt{2n}\,\varphi_{n-1}, \tag{5a}$$

---

[5]) H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechn. u. Kollektivmaßlehre. Leipzig: Teubner 1906.

[6]) Vgl. R. Courant und D. Hilbert, Methoden d. math. Phys. **1** (1924), S. 76–77.

ferner die Nullwerte der Hermiteschen Polynome:

$$H_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \qquad (n \equiv 0 \bmod 2) \tag{6}$$

und

$$H_n(0) = 0 \qquad (n \equiv 1 \bmod 2). \tag{6a}$$

Wegen der Normierung der $\varphi_n(x)$ gilt schließlich noch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n \varphi_m \, dx = 0 \qquad (n \neq m), \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^2 \, dx = 1. \tag{7a}$$

Um das Ziel dieses Paragraphen zu erreichen, vergleichen wir Gleichung (2) mit den Differentialgleichungen der Funktionen

$$s_n = \sin(\sqrt{2n+1}\,\alpha), \qquad c_n = \cos(\sqrt{2n+1}\,\alpha).$$

Diese lauten:

$$s_n'' + (2n+1)\, s_n = 0, \tag{8}$$

$$c_n'' + (2n+1)\, c_n = 0. \tag{8a}$$

Multipliziert man (2) mit s_n, nachdem x durch α ersetzt ist, Gleichung (8) mit $-\varphi_n(\alpha)$ und addiert, so entsteht

$$\varphi_n'' s_n - s_n'' \varphi_n - \alpha^2 s_n \varphi_n = 0. \tag{9}$$

Auf dem gleichen Wege findet man

$$\varphi_n'' c_n - c_n'' \varphi_n - \alpha^2 c_n \varphi_n = 0, \tag{9a}$$

und hieraus und aus (9) durch Integration:

$$(\varphi_n' s_n - s_n' \varphi_n)\Big|_0^x = \int_0^x \alpha^2 s_n \varphi_n \, d\alpha,$$

$$(\varphi_n' c_n - c_n' \varphi_n)\Big|_0^x = \int_0^x \alpha^2 c_n \varphi_n \, d\alpha.$$

Da nun

$$s_n(0) = 0, \qquad s_n'(0) = \sqrt{2n+1},$$
$$c_n(0) = 1, \qquad c_n'(0) = 0$$

ist, erhalten wir nach Einsetzen der Grenzen:

$$\varphi_n'(x)\, s_n(x) - s_n'(x)\, \varphi_n(x) + \sqrt{2n+1}\, \varphi_n(0) = \int_0^x \alpha^2 s_n \varphi_n \, d\alpha,$$

$$\varphi_n'(x)\, c_n(x) - c_n'(x)\, \varphi_n(x) - \varphi_n'(0) = \int_0^x \alpha^2 c_n \varphi_n \, d\alpha.$$

Addiert man diese Gleichungen nach Beifügung der Faktoren $s_n'(x)$ und $c_n'(x)$ und beachtet gleichzeitig, daß

$$s_n s_n' + c_n c_n' = 0, \qquad s_n'^2 + c_n'^2 = 2n + 1$$

ist, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}(10)\qquad & -(2n+1)\varphi_n(x) + (2n+1)\varphi_n(0)\cos(x\sqrt{2n+1}) \\ & + \sqrt{2n+1}\,\varphi_n'(0)\sin(x\sqrt{2n+1}) \\ & = \sqrt{2n+1}\int_0^x \alpha^2 \varphi_n(\alpha)\sin\sqrt{2n+1}\,(\alpha - x)\cdot d\alpha .\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun in (10) die Fälle eines geraden und ungeraden n.

Fall I. $\boldsymbol{n \equiv 0 \bmod 2}$.

Aus (5a) schließt man zunächst, da $\varphi_{n-1}(0) = 0$ ist:

$$\varphi_n'(0) = 0 .$$

Ferner ist nach Gl. (6)

$$H_n(0) = (-2)^{\frac{n}{2}} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-1),$$

somit nach (3)

$$(11)\qquad \varphi_n(0) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot n}} .$$

Gemäß der Wallisschen Formel ist aber

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-1)(n+1)}{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot n^2} \right) = \frac{2}{\pi}$$

oder in anderer Schreibweise

$$\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot n} \right)^2 = \frac{2\,[1+\varepsilon_n]}{\pi\,(n+1)} \qquad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

Nach Substitution dieses Wertes geht (11) über in

$$(12)\qquad \varphi_n(0) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\frac{2}{n}}\,[1 + \varepsilon_1(n)],$$

wobei $\varepsilon_1(n) = \varepsilon_1$ wieder eine Größe bedeutet, die bei unendlich zunehmendem n verschwindet. Mit Berücksichtigung der letzten Gleichung nimmt Gleichung (10) die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}(13)\qquad \varphi_n(x) = {} & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\frac{2}{n}}\,(1+\varepsilon_1)\cos(x\sqrt{2n+1}) \\ & - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x \alpha^2 \varphi_n(\alpha)\sin(\alpha - x)\sqrt{2n+1}\cdot d\alpha \\ & (n \equiv 0 \bmod 2).\end{aligned}$$

Fall II. $n \equiv 1 \bmod 2$.

Hier ist auf Grund von Gleichung (5a), (6) und (12)

$$\varphi_n(0) = 0,$$

$$\varphi_n'(0) = \sqrt{2n}\,\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{\frac{2}{n-1}}\,(1+\varepsilon_1),$$

und aus Gleichung (10) wird daher im zweiten Falle

$$\varphi_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{\frac{2}{n-1}}\,(1+\varepsilon_2)\sin(x\sqrt{2n+1}) - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\int_0^x \alpha^2\,\varphi_n(\alpha)\sin(\alpha - x)\sqrt{2n+1}\cdot d\alpha \tag{14}$$

$$(n \equiv 1 \bmod 2).$$

Von jetzt ab wollen wir unter n stets eine gerade Zahl verstehen. Dann folgt aus (13) und (14), da nunmehr n gerade, $n+1$ aber ungerade ist:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{A_n(1+\varepsilon_1)}{\sqrt[4]{n}}\cos(x\sqrt{2n+1}) - \frac{h(n,x)}{\sqrt{2n+1}} \\ \varphi_{n+1}(x) &= \frac{A_n(1+\varepsilon_2)}{\sqrt[4]{n}}\sin(x\sqrt{2n+3}) - \frac{h(n+1,x)}{\sqrt{2n+3}} \end{aligned}\right\} n \equiv 0 \bmod 2. \tag{15}$$

Dabei sind die Abkürzungen

$$A_n = (-1)^{\frac{n}{2}}\sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2}},$$

$$h(n,x) = \int_0^x \beta^2\,\varphi_n(\beta)\sin(\beta - x)\sqrt{2n+1}\cdot d\beta$$

verwendet worden.

§ 2.

Ansatz für die Reihenentwicklung und Summation der Partialsumme.

Als Partialsumme, deren Grenzwert für unendlich zunehmendes n wir bestimmen wollen, nehmen wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\varphi_k(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k(\alpha)\,f(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(x)\,\varphi_k(\alpha)\cdot d\alpha,$$

die ganz analog der Partialsumme der Fourierreihe gebildet ist. Die Existenz der Integrale ist durch die Eigenschaften gesichert, die wir später der Funktion $f(x)$ zuteilen werden. Da die H_n eine Sturmsche Folge bilden, läßt sich die Summation in S_n in einfacher Weise ausführen. Zu

diesem Zweck setzen wir[6])

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2 \, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

und schreiben Gleichung (4) zweimal nieder, für die Argumente x und α:

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + \frac{J_n}{J_{n-1}} H_{n-1}(x) = 0,$$

$$H_{n+1}(\alpha) - 2\alpha H_n(\alpha) + \frac{J_n}{J_{n-1}} H_{n-1}(\alpha) = 0.$$

Versieht man die beiden letzten Zeilen mit den Faktoren $H_n(\alpha)$ bzw. $-H_n(x)$ und addiert sie sodann, so gelangt man zu der Beziehung

$$\psi_n - \psi_{n-1} = \frac{H_n(x) H_n(\alpha)}{J_n}, \tag{16}$$

wenn man zugleich die Abkürzung

$$\psi_n = \frac{H_{n+1}(x) H_n(\alpha) - H_{n+1}(\alpha) H_n(x)}{2(x-\alpha) J_n}$$

benutzt. Fügen wir zu (16) noch die n weiteren Relationen

$$\begin{aligned}
\psi_{n-1} - \psi_{n-2} &= \frac{H_{n-1}(x) H_{n-1}(\alpha)}{J_{n-1}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi_1 - \psi_0 &= \frac{H_1(x) H_1(\alpha)}{J_1}, \\
\psi_0 &= \frac{H_0(x) H_0(\alpha)}{J_0}
\end{aligned}$$

hinzu und addieren alles, so steht die gewünschte Summationsformel vor uns:

$$\frac{H_{n+1}(x) H_n(\alpha) - H_{n+1}(\alpha) H_n(x)}{2(x-\alpha) J_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x) H_k(\alpha)}{J_k}. \tag{17}$$

Die entsprechende Gleichung für die Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ ist bezüglich der rechten Seite noch einfacher gebaut, sie lautet:

$$\sqrt{\frac{2n+2}{2(x-\alpha)}} \{\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha) \varphi_n(x)\} = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) \varphi_k(\alpha). \tag{18}$$

Die zur Untersuchung vorgelegte Summe S_n kann somit auf folgende Gestalt gebracht werden:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha) \varphi_n(x)}{x-\alpha} \, d\alpha \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{-g} + \int_{-g}^{+g} + \int_{+g}^{+\infty} \right\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Dabei sei

$$-g < x < +g.$$

Die drei Integrale nehmen wir gesondert vor.

§ 3.

Zweite Approximation und der Grenzwert des mittelsten Integrales in Gleichung (19).

Der Versuch zeigt, daß man beim mittelsten Integral mit der durch Gleichung (15) gegebenen ersten Approximation, wie sie zuerst Liouville in seinen Abhandlungen verwendet hat, nicht auskommt. Die zweite Approximation gewinnen wir, indem wir (15) benutzen und daselbst in der Integraldarstellung von $h(n, x)$ den Wert von $\varphi_n(\alpha)$ gemäß ebenderselben Gleichung (15) substituieren. Auf diese Weise entsteht zunächst

$$\varphi_n(x) = \frac{A_n(1+\varepsilon_1)}{\sqrt[4]{n}} \cos\left(x\sqrt{2n+1}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x \alpha^2 \sin(\alpha - x)\sqrt{2n+1} \cdot \left[\frac{A_n(1+\varepsilon_1)}{\sqrt[4]{n}} \cos\left(\alpha\sqrt{2n+1}\right) - \frac{h(n,\alpha)}{\sqrt{2n+1}}\right] d\alpha.$$

Ebenso approximieren wir $\varphi_{n+1}(x)$. Macht man noch von den Bezeichnungen

$$s(n, x) = \int_0^x \alpha^2 \sin(\alpha - x)\sqrt{2n+1} \cdot \cos\alpha\sqrt{2n+1} \cdot d\alpha,$$

$$\sigma(n, x) = \int_0^x \alpha^2 \sin(\alpha - x)\sqrt{2n+1} \cdot \sin\alpha\sqrt{2n+1} \cdot d\alpha,$$

$$t(n, x) = \int_0^x \alpha^2 \sin(\alpha - x)\sqrt{2n+1} \cdot h(n, \alpha)\, d\alpha,$$

$$h(n, x) = \int_0^x \alpha^2 \sin(\alpha - x)\sqrt{2n+1} \cdot \varphi_n(\alpha)\, d\alpha$$

Gebrauch, so werden die zweiten Approximationen durch das folgende Formelpaar gegeben:

$$(20)\quad \begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{A_n(1+\varepsilon_1)}{\sqrt[4]{n}} \left\{\cos x\sqrt{2n+1} - \frac{s(n,x)}{\sqrt{2n+1}}\right\} + \frac{t(n,x)}{2n+1}, \\ \varphi_{n+1}(x) &= \frac{A_n(1+\varepsilon_2)}{\sqrt[4]{n}} \left\{\sin x\sqrt{2n+3} - \frac{\sigma(n+1,x)}{\sqrt{2n+3}}\right\} + \frac{t(n+1,x)}{2n+3} \\ &\qquad (n \equiv 0 \bmod 2). \end{aligned}$$

Für die hier auftretenden Funktionen s, σ, t, h wollen wir einige Abschätzungen vermerken, die wir in unseren späteren Betrachtungen be-

nötigen. Es sind dies:

$$(21)\quad |s(n,x)|<x^3,\quad |\sigma(n,x)|<x^3,\quad |h(n,x)|<x^{\frac{5}{2}},\quad |t(n,x)|<x^{\frac{11}{2}}.$$

Die beiden ersten sind klar, die Richtigkeit der dritten weist man mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung nach:

$$|h(n,x)|\leqq\left\{\int_0^x \alpha^4\sin^2\sqrt{2n+1}\,(\alpha-x)\,d\alpha\cdot\int_0^x \varphi_n^2(\alpha)\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{2}}<x^{\frac{5}{2}}.$$

Hierbei ist Gleichung (7) herangezogen worden. Mit der dritten Abschätzung hat man zugleich auch die letzte gefunden.

Nunmehr setzen wir die Resultate aus (20) in das Integral ein. Es entsteht:

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\,\frac{\varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(\alpha)-\varphi_{n+1}(\alpha)\,\varphi_n(x)}{x-\alpha}\,d\alpha=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-g}^{+g}\frac{f(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\left[\frac{A_n(1+\varepsilon_3)}{\sqrt[4]{n}}\left(\sin x\sqrt{2n+3}-\frac{\sigma(n+1,x)}{\sqrt{2n+3}}\right)+\frac{t(n+1,x)}{2n+3}\right]\\ \times\left[\frac{A_n(1+\varepsilon_1)}{\sqrt[4]{n}}\left(\cos\alpha\sqrt{2n+1}-\frac{s(n,\alpha)}{\sqrt{2n+1}}\right)+\frac{t(n,\alpha)}{2n+1}\right]\\ -\left[\frac{A_n(1+\varepsilon_2)}{\sqrt[4]{n}}\left(\sin\alpha\sqrt{2n+3}-\frac{\sigma(n+1,\alpha)}{\sqrt{2n+3}}\right)+\frac{t(n+1,\alpha)}{2n+3}\right]\\ \times\left[\frac{A_n(1+\varepsilon_1)}{\sqrt[4]{n}}\left(\cos x\sqrt{2n+1}-\frac{s(n,x)}{\sqrt{2n+1}}\right)+\frac{t(n,x)}{2n+1}\right]\end{array}\right]d\alpha.$$

In der großen Klammer wird der zweite Summand aus dem ersten durch Vertauschung von x und α erzeugt. Löst man die Klammern auf, so erhält man:

$$(22)\quad \sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\,\frac{\varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(\alpha)-\varphi_{n+1}(\alpha)\,\varphi_n(x)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

$$=C_1\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\,\frac{\sin x\sqrt{2n+3}\cos\alpha\sqrt{2n+1}-\sin\alpha\sqrt{2n+3}\cos x\sqrt{2n+1}}{x-\alpha}\,d\alpha$$

$$+C_2\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\,\frac{\sin\alpha\sqrt{2n+3}\,s(n,x)-\sin x\sqrt{2n+3}\,s(n,\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

$$+C_3\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\,\frac{\sigma(n+1,\alpha)\cos x\sqrt{2n+1}-\sigma(n+1,x)\cos\alpha\sqrt{2n+1}}{x-\alpha}\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{n}\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\,\frac{\psi(\alpha,x,n)}{x-\alpha}\,d\alpha=M_1+M_2+M_3+M_4.$$

In M_4 sind alle diejenigen Integrale aufgenommen, die mit einer der Potenzen

$$n^{-1},\ n^{-\frac{5}{4}},\ n^{-\frac{3}{2}},\ n^{-\frac{7}{4}},\ n^{-2}$$

behaftet sind. C_1, C_2 und C_3 hängen nur von n ab und haben für wachsendes n den gemeinsamen Grenzwert $\frac{1}{\pi}$:

$$\lim_{n\to\infty} C_1 = \lim_{n\to\infty} C_2 = \lim_{n\to\infty} C_3 = \frac{1}{\pi}.$$

Wir betrachten nunmehr jedes der Integrale M_1, M_2, M_3 und M_4 für sich.

Integral M_1: Den Integranden formen wir folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}&\sin x\sqrt{2n+3}\cos\alpha\sqrt{2n+1} - \sin\alpha\sqrt{2n+3}\cos x\sqrt{2n+1}\\ =\ &\frac{1}{2}\{\sin(x\sqrt{2n+3}+\alpha\sqrt{2n+1}) + \sin(x\sqrt{2n+3}-\alpha\sqrt{2n+1})\\ &-\sin(\alpha\sqrt{2n+3}+x\sqrt{2n+1}) - \sin(\alpha\sqrt{2n+3}-x\sqrt{2n+1})\}.\end{aligned}$$

Fassen wir nunmehr die untereinanderstehenden Summanden zu einem sin-cos-Produkt zusammen nnd führen wir zugleich die Bezeichnung

$$N = \frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}{2}$$

ein, so gewinnt der Integrand von M_1 die Gestalt

$$\cos[(\alpha+x)N]\sin\left(\frac{x-\alpha}{2N}\right) + \cos\left(\frac{x+\alpha}{2N}\right)\sin[(x-\alpha)N].$$

M_1 setzt sich demnach aus zwei Integralen in folgender Weise zusammen:

$$(23)\qquad M_1 = C_1\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\cos[(x+\alpha)N]\frac{\sin\left(\frac{x-\alpha}{2N}\right)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

$$+ C_1\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\cos\left(\frac{x+\alpha}{2N}\right)\frac{\sin[(x-\alpha)N]}{x-\alpha}\,d\alpha.$$

Das erste Integral verschwindet für $n\to\infty$, denn es gilt:

$$\left|f(\alpha)\cos[(x+\alpha)N]\frac{\sin\left(\frac{x-\alpha}{2N}\right)}{x-\alpha}\right| < \frac{C(g)}{2N}.$$

Es ist hierbei

$$|f(\alpha)| < C(g)$$

angenommen worden, worin $C(g)$ eine nur von g abhängige Funktion darstellt. Wir wollen nämlich, wie bereits in der Einleitung angedeutet war, voraussetzen, daß $f(\alpha)$ in jedem Intervalle $-g \ldots +g$ von beschränkter Schwankung sei. Eine solche Funktion ist aber auch beschränkt. Um

den Grenzwert des zweiten Integrals in Gleichung (23) zu ermitteln, ziehen wir die Theorie des Dirichletschen Integrals heran, deren Ergebnis das folgende ist:

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_{h}^{h_1} F(\alpha)\,\frac{\sin n(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\{F(x+0)+F(x-0)\}, \tag{24}$$

sofern $h_1 < x < h$ und $F(\alpha)$ in $h_1 \ldots h$ von beschränkter Schwankung ist (n gleich einer ganzen Zahl). Denselben Grenzwert hat aber auch das für unsere Aufgabe in Betracht kommende Integral

$$\int_{h_1}^{h} F(\alpha, N)\,\frac{\sin N(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha, \tag{25}$$

nämlich

$$\frac{\pi}{2}\{\Phi(x+0)+\Phi(x-0)\}.$$

N laufe dabei irgendwie gegen ∞, $\lim_{N\to\infty} F(\alpha, N) = \Phi(\alpha)$ existiere und zwar mit gleichmäßiger Annäherung in der Variablen α:

$$|F(\alpha, N) - \Phi(\alpha)| < \varepsilon(N), \qquad \lim_{N\to\infty}\varepsilon(N) = 0.$$

Ferner möge analog der oben herangezogenen Voraussetzung $\Phi(\alpha)$ von beschränkter Schwankung sein.

Während unserer Darlegungen werden uns die beiden Fälle

$$F(\alpha, N) = f(\alpha)\cos\left(\frac{x+\alpha}{2N}\right)$$

und

$$F(\alpha, N) = \alpha^3 f(\alpha)\sin\left(\frac{x+\alpha}{2N}\right)$$

begegnen, für welche unsere Annahmen zutreffen.

Der Beweis von (25) läßt sich fast genau so durchführen wie der von (24).[7])

Nunmehr dürfen wir aus (23) und (25) schließen:

$$\lim_{N\to\infty} M_1 = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}. \tag{26}$$

Integral M_4: $\psi(\alpha, x, n)$ ist eine Summe von Produkten je zweier der Funktionen sin, cos, s, σ oder t. Da ferner ψ von der Gestalt

$$\chi(\alpha, x, n) - \chi(x, \alpha, n)$$

ist, so gilt erstens

$$\psi(x, x, n) = 0.$$

[7]) Vgl. G. Kowalewski, Diff.- u. Integralrechn., §§ 164–166.

Weiter schließt man aus der Definition von h, s, σ und t:

$$\psi'(\alpha, x, n) = \frac{d}{d\alpha}\psi(\alpha, x, n) = \sqrt{n}\,\psi_1(\alpha, x, n),$$

wobei die hierdurch eingeführte Funktion ψ_1 der Ungleichung

$$|\psi_1| < C_1(g)$$

genügt. $C_1(g)$ ist von derselben Art wie wie das oben gebrauchte $C(g)$. Diese Abschätzung fußt auf dem Formelsystem (21). Durch Anwendung des Mittelwertsatzes können wir daher den Integranden von M_4 in folgender Weise umformen:

$$\frac{\psi(\alpha, x, n)}{x-\alpha} = \frac{\psi(\alpha, x, n) - \psi(x, x, n)}{x-\alpha} = -\sqrt{n}\,\psi_1(\tilde{\alpha}, x, n)$$

$$\tilde{\alpha} = x + \theta(\alpha - x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Hieraus folgt sofort:

$$(27) \qquad |M_4| = \frac{1}{\sqrt{n}}\left|\int_{-g}^{+g} f(\alpha)\,\psi_1(\tilde{\alpha}, x, n)\,d\alpha\right| < \frac{C_1(g)}{\sqrt{n}}, \qquad \lim_{n\to\infty} M_4 = 0.$$

Integral M_2: Für $s(n, x)$ können wir mit Benutzung der partiellen Integration folgende Darstellung geben:

$$\begin{aligned} s(n, x) &= \int_0^x \alpha^2 \sin\sqrt{2n+1}\,(\alpha - x)\cdot\cos\alpha\sqrt{2n+1}\,d\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x \alpha^2\left[\sin(2\alpha - x)\sqrt{2n+1} - \sin x\sqrt{2n+1}\right]d\alpha \\ &= -\frac{1}{6}x^3\sin x\sqrt{2n+1} + \frac{R(n, x)}{\sqrt{2n+1}}, \end{aligned}$$

worin

$$R(n, x) = -\frac{1}{4}x^2\cos x\sqrt{2n+1} + \frac{1}{2}\int_0^x \alpha\cos\sqrt{2n+1}\,(2\alpha - x)\,d\alpha$$

gesetzt ist. Demnach wird aus M_2:

$$\begin{aligned} M_2 = \frac{C_2}{\sqrt{n}}\int_{-g}^{+g} \frac{f(\alpha)}{x-\alpha}\Big(&\frac{\alpha^3}{6}\sin\alpha\sqrt{2n+1}\sin x\sqrt{2n+3} \\ &- \frac{x^3}{6}\sin x\sqrt{2n+1}\sin\alpha\sqrt{2n+3}\Big)\,d\alpha \end{aligned}$$

$$- \frac{C_2}{n\sqrt{2+\frac{1}{n}}}\int_{-g}^{+g} \frac{f(\alpha)}{x-\alpha}\left[\sin x\sqrt{2n+3}\,R(n, \alpha) - \sin\alpha\sqrt{2n+3}\,R(n, x)\right]d\alpha.$$

Das zweite Integral ist, da

$$R'(n, x) = \sqrt{n}\,R_1, \qquad |R_1| < g^2$$

gilt, genau vom Typus M_4, mit zunehmendem n verschwindet also dieser Teil von M_2. Das erste Integral bringen wir auf die Form:

$$(28)\quad \frac{C_2}{\sqrt{n}} \int_{-g}^{+g} \frac{f(\alpha)}{x-\alpha} \left[\begin{array}{l} \frac{x^3-\alpha^3}{6} \sin x\sqrt{2n+1} \sin \alpha \sqrt{2n+3} \\ + \frac{\alpha^3}{6} \left(\begin{array}{l} \sin x\sqrt{2n+1} \sin \alpha\sqrt{2n+3} \\ - \sin \alpha \sqrt{2n+1} \sin x \sqrt{2n+3} \end{array} \right) \end{array} \right] d\alpha$$

$$= \frac{C_2}{\sqrt{n}} \int_{-g}^{+g} \frac{1}{6} f(\alpha)\,(x^2+\alpha x+x^2) \sin x\sqrt{2n+1} \sin \alpha \sqrt{2n+3}\, d\alpha$$

$$+ \frac{C_2}{\sqrt{n}} \int_{-g}^{+g} \frac{\alpha^3 f(\alpha)}{6(x-\alpha)} \left[\sin\left(\frac{x-\alpha}{2N}\right) \sin[(x+\alpha)N] + \sin[(x-\alpha)N] \sin\left(\frac{x+\alpha}{2N}\right) \right] d\alpha$$

$$\left(N = \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}{2} \right).$$

Hierbei ist Gebrauch gemacht worden von einer Umformung, die ganz analog ist der bei dem Integral M_1 benutzten. In Gleichung (28) verschwindet der Grenzwert des dritten Integrals, weil es sich um ein Dirichletsches Integral handelt, vor dem aber noch der Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ steht. Auch bei den beiden übrigen Integralen wird das Verschwinden durch die Potenz $n^{-\frac{1}{2}}$ verursacht. Genau so läßt sich M_3 behandeln, welches den gleichen Bau wie M_2 aufweist. Es gilt somit:

$$(29)\qquad \lim_{n\to\infty} M_2 = \lim_{n\to\infty} M_3 = 0.$$

Gleichung (26), (27) und (29) zusammenfassend, finden wir als erstes Resultat unserer Untersuchungen:

$$(30)\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_{-g}^{+g} f(\alpha) \frac{\varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha)\,\varphi_n(x)}{x-\alpha}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

§ 4.

Grenzwert des Integrals

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_{+g}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(\alpha) - \varphi_{n+1}(\alpha)\,\varphi_n(x)}{x-\alpha}\, d\alpha.$$

Es genügt, das erste dieser beiden Integrale heranzuziehen, also

$$\varphi_{n+1}(x) \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_{g}^{\infty} f(\alpha) \frac{\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\, d\alpha.$$

Dieses läßt sich durch Anwendung der Formel (5a) und einer partiellen Integration in folgender Weise schreiben:

$$(30\,a)\quad \varphi_{n+1}(x)\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_g^\infty \frac{f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\varphi_{n+1}(x)\int_g^\infty \frac{f(\alpha)}{x-\alpha}\left(\varphi'_{n+1}(\alpha)+\alpha\,\varphi_{n+1}(\alpha)\right)d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\varphi_{n+1}(x)\left\{\frac{f(\alpha)\,\varphi_{n+1}(\alpha)}{x-\alpha}\Big|_g^\infty - \int_g^\infty \varphi_{n+1}(\alpha)\left[\frac{f'(\alpha)}{x-\alpha}+\frac{f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}\right]d\alpha\right.$$

$$\left. + \int_g^\infty \frac{\alpha f(\alpha)\,\varphi_{n+1}(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha\right\}.$$

Verlangen wir, daß die Integrale

$$(30\,b)\qquad \int_g^\infty f^2(\alpha)\,d\alpha \quad \text{und} \quad \int_g^\infty \left(\frac{f'(\alpha)}{\alpha}\right)^2 d\alpha$$

existieren, so ist die geschweifte Klammer kleiner als eine Konstante $C(g)$. Denn wegen (30b) ist

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha) = 0,$$

daher erst recht

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{f(\alpha)\,\varphi_{n+1}(\alpha)}{x-\alpha}\right) = 0.$$

An der unteren Grenze aber finden wir auf Grund von (15):

$$\left|\frac{f(g)}{x-g}\left\{\frac{A_n(1+\varepsilon_2)}{\sqrt[4]{n}}\sin(g\sqrt{2n+3}) - \frac{h(n+1,g)}{\sqrt{2n+3}}\right\}\right| < C'(g),$$

da nämlich wegen (21)

$$|h(n+1,g)| < g^{\frac{5}{2}}$$

gilt. Auch die drei in der geschweiften Klammer stehenden Integrale bleiben wegen (30b) beschränkt:

$$\left(\int_g^\infty \left|\varphi_{n+1}\frac{f'}{x-\alpha}\right|d\alpha\right)^2 \leqq \left(\frac{1}{1-\frac{x}{g}}\right)^2\left(\int_g^\infty |\varphi_{n+1}|\cdot\left|\frac{f'}{\alpha}\right|d\alpha\right)^2$$

$$\leqq \left(\frac{1}{1-\frac{x}{g}}\right)^2\cdot\int_g^\infty \varphi_{n+1}^2\,d\alpha\cdot\int_g^\infty\left(\frac{f'}{\alpha}\right)^2 d\alpha < C''(g),$$

wobei von der Schwarzschen Ungleichung Gebrauch gemacht ist. Die gleichen Schlüsse führen bei den anderen beiden Integralen zum Ziele. Da ferner

in (30a) der vor der Klammer stehende Faktor $\frac{1}{2}\varphi_{n+1}(x)$ Gleichung (15) zufolge mit zunehmendem n verschwindet, so geht das ganze Integral für $n \to \infty$ gegen Null.

In diesem Paragraphen haben wir bisher angenommen, daß die Ableitung von $f(\alpha)$ existiert. Lassen wir diese weitgehende Voraussetzung fallen, so kommen wir auf folgendem Wege zu einer Bedingung für das Verschwinden des Integrals

$$\varphi_{n+1}(x)\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_g^\infty \frac{f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha:$$

Nach Gleichung (15) gilt:

$$(31)\qquad \varphi_{n+1}(x)\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_g^\infty f(\alpha)\frac{\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha$$
$$= n^{\frac{1}{4}}\left\{C_1'\sin x\sqrt{2n+3}+n^{-\frac{1}{4}}C_2'h(n+1,x)\right\}\int_g^x \frac{f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha,$$

wobei

$$C_1' = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}(1+\varepsilon_2)A_n, \qquad C_2' = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\frac{n}{2n+3}$$

gesetzt ist; es ist also

$$\lim_{n\to\infty} C_1' = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty} C_2' = \frac{1}{2}.$$

Aus (31) geht zunächst hervor, daß wir an $f(\alpha)$ die Forderung

$$(32)\qquad \int_g^\infty \frac{f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha = n^{-\frac{1}{4}}\cdot\varepsilon$$

stellen müssen, worin wie üblich ε eine Größe darstellt, die beliebig klein gemacht werden kann. Um aus dieser Bedingung eine einfachere herauszuschälen, wenden wir die Schwarzsche Ungleichung an:

$$(33)\qquad \left(\int_g^\infty \frac{f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha\right)^2 < \frac{1}{\left(1-\frac{x}{g}\right)^2}\left(\int_g^\infty \left|\frac{f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)}{\alpha}\right|d\alpha\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{1-\frac{x}{g}}\right)^2\left(\int_g^\infty \left|\alpha^r f(\alpha)\right|\cdot\left|\frac{\varphi_n(\alpha)}{\alpha^{r+1}}\right|d\alpha\right)^2$$
$$\leqq \left(\frac{1}{1-\frac{x}{g}}\right)^2\cdot\int_g^\infty \alpha^{2r}f^2(\alpha)\,d\alpha\cdot\int_g^\infty \frac{\varphi_n^2(\alpha)}{\alpha^{2r+2}}\,d\alpha.$$

Indem wir in (33) die Konvergenz des ersten Integrals

$$\int^\infty \alpha^{2r}f^2(\alpha)\,d\alpha$$

fordern, können wir es durch Wahl eines genügend großen g beliebig klein machen (r wird bald in geeigneter Weise gewählt werden), wir haben damit also den in (32) vorkommenden Faktor ε festgelegt. Das zweite Integral in (33), nämlich

$$\int_g^\infty \frac{\varphi_n^2(\alpha)}{\alpha^{2r+2}}\, d\alpha,$$

muß den andern Faktor $n^{-\frac{1}{2}}$ liefern. (Der Exponent muß $-\frac{1}{2}$ heißen, weil in (33) noch die Wurzel zu ziehen ist.) Zu diesem Zwecke nehmen wir eine Zerlegung des Integrationsintervalles vor:

$$J = \int_g^\infty \frac{\varphi_n^2(\alpha)}{\alpha^{2r+2}}\, d\alpha = \int_g^{n^\delta} + \int_{n^\delta}^\infty = J_1 + J_2 \tag{34}$$

Für die in (33) und (34) frei gelassenen Exponenten r und δ stellen wir nunmehr zwei Bestimmungsgleichungen auf. Zunächst ist

$$J_2 = \int_{n^\delta}^\infty \frac{\varphi_n^2(\alpha)}{\alpha^{2r+2}}\, d\alpha < \int_{n^\delta}^\infty \frac{\varphi_n^2(\alpha)}{n^{2\delta(r+1)}}\, d\alpha < \frac{1}{n^{2\delta(r+1)}}. \tag{35}$$

Da nach unseren Überlegungen J_2 also auch J_1 und J_2 die Potenz $n^{-\frac{1}{2}}$ enthalten müssen, haben wir als erste Bedingung:

$$-2\delta(r+1) \leqq -\frac{1}{2}. \tag{36}$$

Um noch J_1 abzuschätzen, beachten wir, daß nach den Gleichungen (15) und (21) die Ungleichung

$$|\varphi_n(\alpha)| < n^{-\frac{1}{4}}(C_1 + C_2 n^{-\frac{1}{4}} \alpha^{\frac{5}{2}})$$

besteht mit den Abkürzungen

$$C_1 = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2}}(1+\varepsilon_1), \qquad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}.$$

Hierdurch geht J_1 über in:

$$J_1 = \int_g^{n^\delta} \frac{\varphi_n^2(\alpha)}{\alpha^{2r+2}}\, d\alpha < n^{-\frac{1}{2}} \int_g^{n^\delta} [C_1^2 + 2n^{-\frac{1}{4}} C_1 C_2 \alpha^{\frac{5}{2}} + C_2^2 n^{-\frac{1}{2}} \alpha^5] \frac{d\alpha}{\alpha^{2r+2}} \tag{37}$$

$$= n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{C_1^2 g^{-2r-1}}{2r+1} - 2C_1 C_2 n^{-\frac{1}{4}} \frac{g^{\frac{3}{2}-2r}}{\frac{3}{2}-2r} - C_2^2 n^{-\frac{1}{2}} \frac{g^{4-2r}}{4-2r} \right)$$

$$- \frac{C_1^2}{2r+1} n^{-\frac{1}{2}-\delta(2r+1)} + \frac{2C_1 C_2}{\frac{3}{2}-2r} n^{-\frac{3}{4}+\delta(\frac{3}{2}-2r)} + \frac{C_2^2}{4-2r} n^{-1+\delta(4-2r)}.$$

Aus denselben Gründen wie in (36) müssen wir fordern:

$$(38)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{2}-\delta(2r+1)\leqq -\frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{4}+\delta\left(\frac{3}{2}-2r\right)\leqq -\frac{1}{2}, \\ -1+\delta(4-2r)\leqq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Indem man in dem System (36), (38) in je zwei Ungleichungen das Gleichheitszeichen wählt, bekäme man sechs Bestimmungsgleichungspaare für r und δ. Man erkennt aber fast ohne Rechnung, daß nur die Zusammenstellung

$$(39)\qquad \begin{aligned} -2\delta(r+1) &= -\frac{1}{2} \\ -1+\delta(4-2r) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

möglich ist, da nämlich in den anderen Fällen mindestens einer der Exponenten aus (36) und (38) $> -\frac{1}{2}$ ausfällt. Aus (39) errechnet man

$$\delta=\frac{1}{6}, \qquad r=\frac{1}{2}.$$

Unsere Gesamtabschätzung haben wir somit gemäß den Gleichungen (31), (33), (34), (35), (37) auf folgende endgültige Gestalt gebracht:

$$(40)\qquad \left|\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\varphi_{n+1}(x)\int_g^\infty \frac{f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha\right|^2$$

$$\leqq n^{\frac{1}{2}}\left\{C_1'\sin x\sqrt{2n+2}+C_2'n^{-\frac{1}{4}}h(n+1,x)\right\}^2\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{x}{g}}\right)^2\cdot\int_g^\infty \alpha f^2(\alpha)\,d\alpha$$

$$\asymp n^{-\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}C_1^2g^{-2}-4C_1C_2n^{-\frac{1}{4}}g^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}C_2^2n^{-\frac{1}{2}}g^3 \\ \quad -\frac{1}{2}C_1^2n^{-\frac{1}{3}}+4C_1C_2n^{-\frac{1}{6}}+\frac{1}{3}C_2^2+1\end{array}\right].$$

Wir denken uns nun von vornherein $g>2|x|$ und so gewählt, daß

$$\left|\int_g^\infty \alpha f^2(\alpha)\,d\alpha\right|<\varepsilon'$$

ist. Lassen wir sodann n gegen Unendlich gehen und berücksichtigen wir, daß

$$\lim_{n\to\infty}C_1'=\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty}C_2'=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}C_1=\sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty}C_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist, so bleibt:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\varphi_{n+1}(x)\int_g^\infty \frac{f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha\right|^2 \tag{40a}$$

$$\leqq \frac{4}{\pi\sqrt{2}}\cdot\int_g^\infty \alpha f^2(\alpha)\,d\alpha\cdot\left\{\frac{1}{\pi g^2\sqrt{2}}+\frac{7}{6}\right\}<\varepsilon''.$$

ε'' kann ebenso wie ε' durch geeignete Wahl von g beliebig klein gemacht werden.

Damit ist erwiesen, daß das Integral

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_g^\infty f(\alpha)\,\frac{\varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(\alpha)-\varphi_{n+1}(\alpha)\,\varphi_n(x)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

beliebig klein gemacht werden kann.

Genau ebenso läßt sich das Integral

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{-g} f(\alpha)\,\frac{\varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(\alpha)-\varphi_{n+1}(\alpha)\,\varphi_n(x)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

behandeln.

Wir haben noch den Beweis für die Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)\,d\alpha$$

nachzuholen, welche in § 2 vorausgesetzt war. Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung erhält man:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)\,d\alpha\right)^2 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\alpha)\,d\alpha.$$

Daß das rechtsstehende Integral konvergiert, folgt sofort aus der Zerlegung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{-1}\frac{\alpha f^2(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha+\int_{-1}^{+1} f^2(\alpha)\,d\alpha+\int_{+1}^{+\infty}\frac{\alpha f^2(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

indem man sich erinnert, daß $f(\alpha)$ von beschränkter Schwankung angenommen worden ist und daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha f^2(\alpha)\,d\alpha$$

existiert.

Alle unsere Betrachtungen gelten zunächst nur für $n\equiv 0 \bmod 2$, also für die geraden Partialsummen. Für ungerade n läßt sich aber alles genau so durchführen. Daß

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=\lim_{n\to\infty} S_n \qquad (n\equiv 0 \bmod 2),$$

schließt man auch aus der Relation

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)=\lim\left\{\varphi_{n+1}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\,\varphi_{n+1}(\alpha)\,d\alpha\right\}$$
$$=0.$$

Es gilt nämlich gemäß (15) $\lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}(x)=0$.

Wir haben somit das folgende, bereits in der Einleitung angeführte Resultat:

Die Reihenentwicklung nach den normierten Hermiteschen Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)\,d\alpha$$

ist konvergent und hat den Wert

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\},\tag{41}$$

sofern $f(\alpha)$ in jedem Intervalle $-g\ldots+g$ von beschränkter Schwankung ist und das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f^2(x)\,dx$$

existiert.

§ 6.

Anwendung auf die Reihen der Kollektivmaßlehre.

Wir kommen nun zu den in der Einleitung erwähnten Reihenentwicklungen, wie sie Bruns zum Aufbau der Kollektivmaßlehre verwendet. Es handelt sich zunächst darum, die Funktion

$$f_1(x)=\operatorname{sgn}(y-x)=\begin{cases}+1 & \text{für} \quad y>x,\\ 0 & \text{„} \quad y=x,\\ -1 & \text{„} \quad y<x\end{cases}$$

als eine nach Hermiteschen Polynomen geordnete Reihe darzustellen. Allgemein können wir (41) in der Form

$$\frac{1}{2}\{f_1(x+0)+f_1(x-0)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}f_1(\alpha)\,H_n(\alpha)\,d\alpha\tag{42}$$

schreiben, wobei

$$f_1(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)$$

bedeutet.

Wir berechnen nun für unser Beispiel die Reihenkoeffizienten

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}H_n(\alpha)\,f_1(\alpha)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{y}H_n(\alpha)\,e^{-\alpha^2}d\alpha-\int_{y}^{\infty}H_n(\alpha)\,e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

Aus den Formeln (4) und (5) folgt

$$e^{-x^2} H_{n+1}(x) = -\frac{d}{dx}\{e^{-x^2} H_n(x)\},$$

so daß sich die Quadratur durchführen läßt. Man erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} H_n(\alpha) f_1(\alpha)\, d\alpha = -2 e^{-y^2} H_{n-1}(y),$$

eine Formel, die auch für $n = 0$ richtig bleibt, wenn

$$H_{-1}(y) = -e^{y^2} \int_0^y e^{-\alpha^2} d\alpha$$

definiert wird. Die Reihe der Funktion $\operatorname{sgn}(y - x)$ lautet demnach

$$\operatorname{sgn}(y-x) = -\frac{2 e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{H_n(x) H_{n-1}(y)}{2^n n!}. \tag{43}$$

In der Brunsschen Darstellung kommen die H_n selbst nicht vor, sondern andere durch seine Untersuchungen sich ergebende Polynome $\mathfrak{R}_n$ und Φ_n, die mit H_n in einfacher Weise zusammenhängen:

$$\mathfrak{R}_n(x) = \frac{(-1)^n H_n(x)}{2^n n!},$$

$$\Phi_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} H_{n-1}(x).$$

Führt man in (43) diese Benennungen ein, so entsteht

$$\operatorname{sgn}(y-x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \mathfrak{R}_n(x)\, \Phi_n(y). \tag{43a}$$

Diese Entwicklung ist identisch mit der von Bruns in seinem Werke aufgestellten Gleichung (20) S. 45, die Bruns ohne Kenntnis der Hermiteschen Abhandlungen untersucht hat. Die Konvergenz, deren Nachweis ebenfalls nicht gelang, ist leicht aus Satz (41) zu erschließen, denn es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f^2(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha = 0.$$

Eine ebenso grundlegende Rolle spielt in der Kollektivmaßlehre die in dem obengenannten Werke S. 118 verzeichnete Darstellung. Sie ist im wesentlichen identisch mit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen Polynomen und lautet:

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' h\, D_n(c,h)\, \Phi_{n+1}(u) = 2 e^{-u^2} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{H_n(u)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} H_n(u) \cdot e^{u^2} \mathfrak{V}(x)\, du, \tag{44}$$

indem mit Bruns $u = h(x - c)$ gesetzt ist. Nach unserer allgemeinen Formel (41) hat die Reihe, da $\mathfrak{B}(x)$ als stetig angenommen werden darf, den Wert

$$2\mathfrak{B}(x),$$

sofern $\mathfrak{B}(x)$ von beschränkter Schwankung ist und das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\, e^{u^2} \mathfrak{B}^2(x)\, du$$

existiert.

Der formale Ansatz der Reihe (44) entspricht der Funktion $e^{u^2}\mathfrak{B}(x)$. Eine Reihe mit einer günstigeren Konvergenzbedingung ist die mit $\mathfrak{B}(x)$ selbst gebildete:

$$\mathfrak{B}(x) = \sum_0^\infty \frac{H_n(u)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} H_n(u)\, \mathfrak{B}(x)\, du \qquad (u = h(x - c)).$$

Hierbei braucht nur das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\, \mathfrak{B}^2(x)\, du$$

zu existieren.

(Eingegangen am 11. August 1928.)

Note on a paper by L. Neder[1]).

By

W. L. Ferrar in Oxford.

In a recent paper L. Neder has given, for real sequences, the theorem that if $f_n^{(k)}(x) \to F^{(k)}(x)$ uniformly in $a \leqq x \leqq b$, and $f_n(x)$ converges for k distinct values of x, then $f_n^{(r)}(x)$ converges uniformly, $r = 0, 1, \ldots, k$, in (a, b).

The theorem for analytic functions of a complex variable is equally simple and the proof equally elementary in character. The considerations on which the complex variable proof is based are quite distinct from those used in the real variable theorem.

Theorem. A sequence $f_n(z)$ of uniform functions is such that

(i) each $f_n(z)$ is analytic in a region D bounded by a closed Jordan curve C,

(ii) $f_n^{(k)}(z)$ converges uniformly to $\varphi(z)$ in D,

(iii) $f_n(z)$ converges for k distinct points of D.

Then,

(iv) $\mu \geqq 0$, $f_n^{(\mu)}(z)$ converges uniformly in any $\bar{D}_1$, a closed region bounded by a curve C_1 interior to C,

(v) $\dfrac{d^k}{dz^k}\{\lim f_n(z)\} = \varphi(z)$ at all points z of D.

Proof. Suppose any C_1 interior to C and containing the k points of (iii) to be given. Take any polygon C_2 separating the curves C_1 and C, and let α, z be points contained in this polygon. Let

$$F_n(z) = \int_\alpha^z \int_\alpha^z \ldots f_n^{(k)}(t)\,(dt)^k,$$

where the path of integration is a polygonal line, of length l, lying inside C_2. Once C_2 has been chosen l has an upper bound M (see lemma at the end of this note).

[1]) Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 30–34.

By (ii), given $\varepsilon > 0$, for $n \geqq N_0(\varepsilon)$,

$$\left| \int_\alpha^z \int_\alpha^z \dots \{\varphi(t) - f_n^{(k)}(t)\} (dt)^k \right| < \varepsilon M^k.$$

Hence, if

$$F(z) = \int_\alpha^z \int_\alpha^z \dots \varphi(t) (dt)^k,$$

$F_n(z)$ tends uniformly to $F(z)$ over the polygon C_2. But $F_n(z)$ must be of the form

$$f_n(z) + A_{0,n} + A_{1,n}(z-\alpha) + \dots + A_{k-1,n}(z-\alpha)^{k-1}$$

where the $A_{r,n}$ are independent of z.

Therefore, by (iii), we have k limiting equations of the type

$$A_{0,n} + A_{1,n}(Z_\lambda - \alpha) + \dots + A_{k-1,n}(Z_\lambda - \alpha)^{k-1} \to L_\lambda,$$

and from these it follows that each $A_{r,n}$ tends to a definite limit A_r.

Hence, uniformly throughout C_2 and its interior,

$$f_n(z) \to F(z) - \sum_{r=0}^{k-1} A_r (z-\alpha)^r.$$

By Weierstrass' theorem it follows that, since $\bar{D}_1$ is *interior* to C_2,

$$f_n^{(\mu)}(z) \to \frac{d^\mu}{dz^\mu} \left\{ F(z) - \sum_{r=0}^{k-1} A_r (z-\alpha)^r \right\} \qquad (\mu \geqq 0),$$

the convergence being uniform in $\bar{D}_1$. Thus (iv) is proved.

Finally, any point z of D may be made a point of $\bar{D}_1$ by suitable choice of C_1, so that (v) follows at once from (iv).

Corollary. *The condition* (iii) *may be replaced by* (iii a) *for some one point* α *of* D, *each of the sequences* $f_n^{(r)}(\alpha)$ $(r = 0, 1, \dots, k-1)$ *converges.*

Lemma. *There is a number* M, *dependent only on the choice of the polygon* C_2, *such that any two points of* C_2 *or its interior can be joined by a polygonal line, lying wholly in the polygon* C_2, *of length* $l < M$.

The polygon C_2 can be divided into a finite number of triangles[2]). Let these be $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, and let l_r be the longest side of the triangle Δ_r. Then

$$l < l_1 + l_2 + \dots + l_n.$$

[2]) Cf. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie **1** (1923), S. 116–117.

(Eingegangen am 3. Dezember 1928.)

Über die Wertverteilung bei ganzzahligen Polynomen.

Von

M. Fekete in Jerusalem.

1. In seiner Abhandlung „Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten“ hat Herr I. Schur u. a. einen interessanten Satz aufgestellt und bewiesen, wonach *zu einem reellen Intervall J, sobald seine Länge kleiner ist als* 4, *nur endlich viele Gleichungen*

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \tag{1}$$

mit lauter ganzzahligen Koeffizienten, mit dem höchsten Koeffizienten 1 *und nicht verschwindender Diskriminante gehören, deren sämtliche Wurzeln in J enthalten sind*[1]).

Aus diesem Satz folgt sofort, daß bei obiger Beschränkung in bezug auf die Länge des Intervalls J für irgendein ganzzahliges Polynom

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

nur in beschränkter Anzahl ganze Zahlen g existieren können, derart, daß die Gleichung

$$p(x) = g \tag{2}$$

ihre sämtlichen Wurzeln in J hat, und zwar hängt die Schranke für die Anzahl A dieser Zahlen g nur von Länge und Lage des J ab[2]).

[1]) Math. Zeitschrift **1** (1918), S. 391, Satz VI**. Ursprünglich betrachtete Herr I. Schur nur Intervalle J mit dem Mittelpunkte $x = 0$ (vgl. Satz VI a. a. O.[1]), S. 389); auf den allgemeinen Fall eines *beliebig* gelegenen J hat ihn Herr G. Pólya aufmerksam gemacht.

[2]) Ist nämlich die Anzahl sämtlicher Gleichungen von der Form (1), die den Forderungen des Schurschen Satzes genügen, gleich $S(J)$, so können höchstens $S(J)$ solche ganze Zahlen g existieren, für welche bei festem $p(x)$ die Gleichung (2) ihre sämtlichen Wurzeln in J hat; denn für keine unter diesen Zahlen g kann $\frac{p(x)-g}{d_g(x)} = 0$ auch mehrfache Wurzeln haben; hierbei bezeichnet $d_g(x)$ den größten gemeinsamen Teiler von $p'(x)$ und $p(x)-g$, derart normiert, daß er lauter ganzzahlige Koeffizienten und den höchsten Koeffizienten Eins besitzt.

2. In der vorliegenden Note will ich nun zeigen, daß es für A sogar eine *absolute* Schranke gibt: *die Anzahl der* eben besprochenen *ganzen Zahlen g kann 4 nie übertreffen*, und zwar müssen die 4 Zahlen g (wenn sie überhaupt existieren) unmittelbar aufeinanderfolgende ganze Zahlen sein. Ich beweise also folgendes:

I. *Ist*

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

irgendein ganzzahliges Polynom mit dem höchsten Koeffizienten Eins und J irgendein reelles Intervall, dessen Länge kleiner als 4 ist, so gibt es kein Paar von ganzen Zahlen g_1, g_2 derart, daß

$$g_2 > g_1$$

gilt und beide Gleichungen

$$p(x) = g_1, \qquad p(x) = g_2$$

ihre sämtlichen Wurzeln in J haben, es sei denn, daß

$$g_2 - g_1 \leqq 3$$

ausfällt.

3. Beim Beweise dieses Satzes benutze ich außer dem oben zitierten Schurschen Theorem den folgenden Satz von Jentzsch[3]):

„Es sei $P(x)$ ein Polynom und die Gleichung $P(x) = a$ habe ihre sämtlichen Wurzeln in einem Oval[4]) O_1. Alle Größen a, für welche das zutrifft, liegen dann gleichfalls in einem Oval[4]) O_2."

Aus diesem Satze folgt[5]), daß, wenn sämtliche Wurzeln beider Gleichungen

$$p(x) = g_1, \qquad p(x) = g_2$$

in J enthalten sind, auch sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$p(x) = r$$

[3]) Archiv der Math. u. Phys. **25** (1917), S. 196. Vgl. M. Fekete, Beweis eines Satzes von Jentzsch, Jahresb. d. Dtsch. Math.-Ver. **31** (1922), S. 42–48. Vgl. auch G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II, S. 246.

[4]) Da Jentzsch in der Formulierung seines (als Aufgabe gestellten) Satzes nicht festgesetzt hat, in welchem Sinne er das Wort „Oval" anwendet, und da für dieses Wort kein einheitlicher Gebrauch vorhanden ist, so verifizierte ich a. a. O.[3]) die Jentzsche Behauptung unter Zugrundelegung dreier verschiedener Erklärungen für den Begriff des Ovals. Von diesen Erklärungen verlieh dem Oval Definition II den größten begrifflichen Inhalt: „Ein Oval ist der Rand (= die Gesamtheit aller Randpunkte) einer beschränkten und konvexen Punktmenge". Vgl. meine Note a. a. O. [3]), S. 43.

[5]) Unter Zugrundelegung der a. a. O.[4]) angeführten Definition II des Ovales. Vgl. Lemma I meiner Note a. a. O. [4]), S. 43.

in J liegen, sobald r eine (reelle) Zahl bedeutet, die der Ungleichung

$$g_1 < r < g_2$$

genügt.

Danach wird das Intervall J auch sämtliche Wurzeln der Gleichung

(3) $$f(p(x)) = 0$$

enthalten, falls $f(y)$ ein ganzzahliges Polynom s-ten Grades ($s \geqq 1$) bedeutet, dessen sämtliche Nullstellen $r_1, r_2, \ldots, r_s$ zwischen g_1 und g_2 liegen; denn die Wurzeln von (3) stimmen leichtersichtlich mit den Wurzeln $\xi_{1\nu}, \xi_{2\nu}, \ldots, \xi_{n\nu}$ der Gleichungen

$$p(x) = r_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

überein[6]).

Nun gibt[7]) es aber, sobald $g_2 - g_1 \geqq 4$ ist, unendlich viele voneinander verschiedene irreduzible ganzzahlige Polynome $f(y)$ mit dem höchsten Koeffizienten 1, deren sämtliche Nullstellen zwischen g_1 und g_2 liegen, und

[6]) Genügt $y = r$ der Gleichung $f(y) = 0$ und $x = \xi$ der Gleichung $p(x) = r$, so befriedigt $x - \xi$ auch die Gleichung (3). Weiß man umgekehrt, daß $x = \xi$ eine Wurzel von (3) ist, so sieht man sofort, daß $r = p(\xi)$ mit einer der Nullstellen von $f(y)$ zusammenfallen muß. W. z. b. w.

[7]) Es sei ν irgendeine ungerade natürliche Zahl und man definiere das Polynom $P_\nu(x)$ durch

(D) $$2\cos\nu t = P_\nu(2\cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq \pi).$$

Dann genügt $P_\nu(x)$ (für $\nu \geqq 3$) der rekursiven Relation:

$$P_\nu(x) = x^\nu - \binom{\nu}{1} P_{\nu-2}(x) + \ldots - \binom{\nu}{\frac{\nu-1}{2}} P_1(x).$$

$$\left(\text{Es ist ja } 2\cos\nu t = e^{i\nu t} + e^{-i\nu t} = (e^{it} + e^{-it})^\nu - \binom{\nu}{1}(e^{i(\nu-2)t} + e^{-i(\nu-2)t}) - \binom{\nu}{2}(e^{i(\nu-4)t} + e^{-i(\nu-4)t}) + \ldots\right).$$

Daraus und aus der Identität $P_1(x) = x$ folgt, daß $P_\nu(x)$ ein ganzzahliges Polynom mit dem höchsten Koeffizienten Eins darstellt, das, abgesehen von x und von $\frac{P_\nu(x)}{x}$, keinen echten Teiler unter den ganzzahligen Polynomen besitzt, sobald ν eine (ungerade) Primzahl ist. Denn für ein solches ν sind sämtliche auf den höchsten folgende Koeffizienten von $P_\nu(x)$ durch ν teilbar. Aber der Koeffizient von x enthält nur die erste Potenz von ν als Faktor, da ja nach der Definitionsgleichung (D) von $P_\nu(x)$

$$P_\nu'(0) = \left[\frac{d}{dt}(2\cos\nu t) : \frac{d}{dt}(2\cos t)\right]_{2\cos t = 0} = \left[\nu \cdot \frac{\sin\nu t}{\sin t}\right]_{\sin t = 1} = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu$$

gilt, also $Q_\nu(x) = x^{-1} \cdot P_\nu(x)$ die Eisentenschen Irreduzibilitäts-Bedingungen erfüllt. Andererseits liegen nach (D) sämtliche Nullstellen von $P_\nu(x)$, also auch die von $Q_\nu(x)$ für jedes ν im Intervall $-2 \leqq x \leqq 2$, also entsprechen die Polynome $f(y) = Q_\nu(y - 2 - g_1)$ ($\nu = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \ldots$) allen Forderungen.

für alle diese $f(y)$ (höchstens $n-1$ von ihnen ausgenommen[8]) sind die Polynome

$$F(x) = f(p(x))$$

voneinander verschiedene ganzzahlige Polynome mit höchstem Koeffizienten 1 und nicht verschwindender Diskriminante, und zwar liegen sämtliche Nullstellen dieser Polynome $F(x)$ in J; das widerspricht aber dem Schurschen Theorem.

4. Ersetzt man dieses Theorem in der jetzt beendigten Beweisführung durch eine von mir stammende Verallgemeinerung[9]) desselben, die aussagt, daß es *zu irgendeiner abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge M von einem transfiniten Durchmesser*[10]), *der kleiner als Eins ist, nur endlich viele Gleichungen* (1) *mit lauter ganzzahligen Koeffizienten, mit dem höchsten Koeffizienten Eins und mit nicht verschwindender Diskriminante gibt, deren sämtliche Wurzeln zu M gehören*, so bekommt man die folgende Erweiterung[11]) des oben bewiesenen Resultates:

---

[8]) Das Polynom $f(p(x))$ und seine Derivierte $f'(p(x)) \cdot p'(x)$ können nur solche gemeinsamen Nullstellen ξ haben, für welche $p'(\xi) = 0$ ist, da ja $f(p(\xi)) = f'(p(\xi)) = 0$ für irreduzibles $f(y)$ die Teilbarkeit von $f'(y)$ durch $f(y)$ involviert. Nun gibt es höchstens $n-1$ voneinander verschiedene Wurzeln von $p'(x) = 0$, und für kein Paar von irreduziblen, nicht zusammenfallenden Polynomen $f(y)$, $f^*(y)$ kann bei derselben Nullstelle ξ von $p'(x)$ gleichzeitig $f(p(\xi)) = 0$, $f^*(p(\xi)) = 0$ bestehen. Demnach ist für sämtliche irreduziblen Polynome $f(y)$ die Diskriminante von $f(p(x))$ von Null verschieden, ausgenommen höchstens $n-1$ von ihnen. W. z. b. w.

[9]) M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 228–249; § 5, S. 240–242.

[10]) Es sei M eine beliebige beschränkte und abgeschlossene Punktmenge in der komplexen x-Ebene. Dann ist (vgl. a. a. O.[9]) § 1, S. 230–232) der transfinite Durchmesser von M gleich dem Grenzwert, gegen welchen die Folge der „Durchmesser" $d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots$ für $n \to \infty$ konvergiert. Hierbei bezeichnet d_n die $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$-te Wurzel aus dem Maximalbetrag des Ausdruckes $\prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (x_i - x_k)$, während $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig voneinander die Punktmenge M durchlaufen. (Offenbar gibt d_2 die Länge des gewöhnlichen Durchmessers, d. h. der größten Sehne von M an, d_3, d_4, ... aber den geometrischen Mittelwert der Längen gewisser Sehnen, die durch Maximumeigenschaften ausgezeichnet sind. Für eine andere Definition des transfiniten Durchmessers vgl. auch § 2 und § 3 a. a. O.[9]), S. 232–237. Vgl. auch den Aufsatz von G. Szegö: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln usw. Math. Ztschr. **21** (1924), S. 203–208.

[11]) Der transfinite Durchmesser eines beliebigen Intervalles ist gleich dem vierten Teil der Länge dieses Intervalles; m. a. W.: jedes Intervall von der Länge < 4 ist eine (konvexe) Punktmenge von einem transfiniten Durchmesser < 1. Vgl. § 4, a. a. O.[9]), S. 237–240.

II. *Ist*

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

irgendein ganzzahliges Polynom mit dem höchsten Koeffizienten Eins und K irgendein abgeschlossener konvexer Bereich auf der z-Ebene, dessen transfiniter Durchmesser kleiner als Eins ist, so gibt es kein Paar von ganzen Zahlen g_1, g_2 derart, daß

$$g_2 > g_1$$

gilt und beide Gleichungen

$$p(z) = g_1, \quad p(z) = g_2 \tag{5}$$

ihre sämtlichen Wurzeln in K haben, es sei denn, daß

$$g_2 - g_1 \leqq 3$$

ist.

5. Ein besonders bemerkenswerter Spezialfall von II kann folgendermaßen formuliert werden:

II*. *Kein Kreis mit einem Radius*[12]*, der kleiner*[13]*) als Eins ist, kann sämtliche Wurzeln der Gleichung*[14])

$$p(z)^2 = 4$$

enthalten, falls $p(z)$ ein ganzzahliges Polynom mit dem höchsten Koeffizienten Eins bezeichnet. —

Die Tragweite der Sätze I und II ersieht man aus den nachfolgenden Zusätzen:

1. Es gibt unendlich viele voneinander verschiedene Polynome

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

mit dem höchsten Koeffizienten Eins, für welche sämtliche Wurzeln beider Gleichungen

$$p(x) = -2, \quad p(x) = +2 \tag{6}$$

im Intervall

$$-2 \leqq x \leqq 2$$

enthalten sind.

---

[12]) Der transfinite Durchmesser eines beliebigen Kreises ist gleich dem Radius dieses Kreises. Vgl. a. a. O.[9]) § 4, S. 237–240 und die Fußnote [4]), S. 234.

[13]) Satz II* bleibt richtig, wenn darin anstatt „kleiner als Eins" „gleich Eins" gelesen wird. Dann liegen nämlich die Wurzeln von $p(z)^2 = 4$ in einem Kreise $|z - z_0| \leqq 1$, dieser Kreis K enthält daher das kleinste konvexe Polygon P, das die genannten Wurzeln einschließt; P aber, als echter Teilbereich von K, hat leicht ersichtlich einen transfiniten Durchmesser, der kleiner ist als Eins = der transfinite Durchmesser von K. Satz II, angewandt auf P, ergibt daraus die erwähnte Verschärfung des Satzes II*.

[14]) Mit a. W.: Wurzeln des Gleichungspaares $p(z) = +2$, $p(z) = -2$.

2. Es gibt unendlich viele voneinander verschiedene Polynome $p(z)$ von der eben charakterisierten Art, für welche sämtliche Wurzeln beider Gleichungen (6) im Kreise

$$|z| \leqq r$$

liegen, sobald $r > 1$ ist.

Beweis von 1. Sei das Polynom $P_n(x)$ von n-tem Grade, definiert durch die Gleichung

$$2\cos nt = P_n(2\cos t) \qquad (n = 1, 2 \ldots);$$

dann sind die Koeffizienten von $P_n(x)$ lauter ganze Zahlen und der Koeffizient von x^n ist gleich Eins[15]). Die Wurzeln von

$$P_n(x) = -2 \quad \text{bzw.} \quad P_n(x) = +2$$

haben die Form $2\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi$ bzw. $2\cos\frac{2\nu}{n}\pi$, wobei ν eine ganze Zahl bezeichnet.

Beweis von 2.: Es sei

$$P_n(z) = z^n;$$

dann sind die Wurzeln von

$$P_n(z) = \pm 2$$

dem Betrage nach $\leqq r$, sobald $n \geqq \frac{\log 2}{\log r}$ ist.

6. Zum Schluß will ich noch erwähnen, daß die Sätze I, II, II* auch dann richtig bleiben, wenn die Forderung, die Koeffizienten von $p(x)$ seien ganze Zahlen, gestrichen, aber die Forderung, daß die höchste Potenz von x in $p(x)$ den Koeffizienten Eins hat, beibehalten wird. Der Beweis dieser Tatsache beruht auf der Untersuchung des transfiniten Durchmessers bei Punktmengen, die aus den Wurzeln der Gleichung $p(x) = y$ bestehen, während y eine gegebene Punktmenge durchläuft. Diese Untersuchung mit ihren Anwendungen auf den oben behandelten Problemkreis werde ich bei einer anderen Gelegenheit veröffentlichen.

Jerusalem, Math. Institut der hebräischen Universität, den 8. Jan. 1929.

[15]) Vgl. Fußnote [7]).

(Eingegangen am 21. Januar 1929.)

Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. II[1]).

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Verzeichnis einiger inhaltlich verwandter, häufig zitierter Arbeiten.

1. W. Krull: Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Annalen **100** (1928), S. 687–698. Zitiert mit „K. I".
2. W. Krull: Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. Math. Zeitschr. **29** (1928), S. 42—54. Zitiert mit „K. II".
3. J. v. Neumann: Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen, Szegeder Berichte 1926. Zitiert mit „N.".
4. A. Ostrowski: Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\cdot\varphi(y)=\varphi(x\cdot y)$. Acta Mathematica **41** (1917), S. 271–284. Zitiert mit „O.".
5. H. Prüfer: Begründung der algebraischen Zahlentheorie. Math. Annalen **94** (1925), S. 198–243. Zitiert mit „P.".
6. K. Rychlik: Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper. J. f. M. **153** (1923), S. 94–107. Zitiert mit „R.".
7. E. Stiemke: Über unendliche algebraische Zahlkörper. Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 9–39. Zitiert mit „St.".

Das Ziel der Arbeit ist die Bestimmung der sämtlichen Ideale der Ordnung $\mathfrak{O}^*$ aller ganzen Zahlen aus einem unendlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$. Doch beschäftigen sich nur die §§ 6 und 7 ausschließlich mit dem algebraischen Spezialfall, während die Betrachtungen von Paragraph 1 bis 5 sich auf beliebige Körper beziehen.

Bereits in K. II habe ich für einen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ die sämtlichen Primärideale charakterisiert, die zu einem festen Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{O}^*$ gehören. Haupthilfsmittel der Untersuchung waren dabei der

[1]) Die vorliegende Arbeit stellt in gewissem Sinne eine Fortführung und abschließende Ergänzung der im Literaturverzeichnis unter K. II angeführten Arbeit dar, doch wird in ihr die Kenntnis von K. II keineswegs vorausgesetzt. Über die im folgenden abgeleiteten Ergebnisse habe ich bereits auf dem Mathematikertag in Kissingen 1927 kurz berichtet. (Vgl. Jahresber. 1928, S. 10).

Übergang von $\mathfrak{O}^*$ zum Ringe $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ aller derjenigen Elemente von $\mathfrak{K}$, die sich als Quotienten von ganzen Elementen mit durch $\mathfrak{p}$ unteilbarem Nenner schreiben lassen, sowie der Umstand, daß sich $\mathfrak{K}$ aus (unendlich vielen) endlichen algebraischen Zahlkörpern aufbauen läßt, deren Theorie bekannt ist. In Wirklichkeit ist nun, wie in § 2 und § 3 der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, für das Studium der $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ die Heranziehung der Lehre von den endlichen algebraischen Zahlkörpern ganz überflüssig; man braucht im wesentlichen nur die Tatsache, daß $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ eine „Maximalordnung" von $\mathfrak{K}$ ist, d. h. daß es in $\mathfrak{K}$ keinen von $\mathfrak{K}$ selbst verschiedenen echten Oberring von $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ gibt.

Den Leitstern für unsere allgemeinen Untersuchungen über Maximalordnungen liefern die Begriffsbildungen der Bewertungstheorie. Wir sprechen von einer Bewertung[2]) des beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$, wenn jedem von 0 verschiedenen Körperelement als „Wert" eine bestimmte reelle Zahl zugeordnet ist, und wenn dabei der Wert eines Produktes stets die Summe der Werte der einzelnen Faktoren darstellt, während der Wert einer Summe nicht kleiner ist als der kleinste der Werte der einzelnen Summanden. Die Gesamtheit der Körperelemente, die bei einer festen Bewertung von $\mathfrak{K}$ nichtnegative Werte besitzen, bildet ersichtlich eine Maximalordnung in $\mathfrak{K}$; es gibt aber, wie in § 2 gezeigt wird, auch umgekehrt zu jeder Maximalordnung $\mathfrak{P}$ eine, und bis auf eine triviale Transformation nur eine Bewertung von $\mathfrak{K}$, bei der gerade die Elemente von $\mathfrak{P}$ nichtnegative Werte erhalten.

Auf Grund der Ergebnisse von § 2 kann man nun die Ideale einer beliebigen Maximalordnung $\mathfrak{P}$ eines beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$ genau so durch „Wert" und „Symbol" charakterisieren, wie ich es im Spezialfall der $\mathfrak{Ri}_\mathfrak{p}$ bereits in K. II getan habe. Der Wert eines Ideals $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{P}$ ist einfach gleich der unteren Grenze der Wert der in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Elemente in bezug auf, eine feste zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung, während das Symbol e oder u angibt, ob $\mathfrak{a}$ Elemente seines eigenen Wertes enthält oder nicht.

Die Resultate und Begriffsbildungen von § 2 und § 3 führen zu folgender allgemeiner Definition der „Hauptordnungen" eines ganz beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$: Ein Unterring $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$, in dem das Einheitselement auftritt, und der $\mathfrak{K}$ als Quotientenkörper besitzt, soll Hauptordnung heißen, wenn $\mathfrak{O}$ den Durchschnitt aller der Maximalordnungen $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}$ darstellt, die $\mathfrak{O}$ als Untermenge enthalten. Die Hauptordnungen lassen sich, wie in § 1 gezeigt wird, dadurch charakterisieren, daß die Teilbarkeitsverhältnisse ihrer Hauptideale mit Hilfe der Bewertungen von $\mathfrak{K}$ vollkommen überblickt werden können, sie besitzen also gerade die Eigenschaft, die im

[2]) Etwas, aber nicht wesentlich abweichend von der üblichen Bewertungsdefinition — vgl. Anm. [3])!

Spezialfall eines algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ die Ordnung $\mathfrak{O}^*$ *aller* ganzen Zahlen unter der Gesamtheit der ganzzahligen Ordnungen von $\mathfrak{K}$ auszeichnet.

In § 4 und § 5 untersuchen wir, inwieweit die bereits gewonnenen Ergebnisse geeignet sind, uns einen Einblick in den Aufbau der Gesamtheit der ganzen und gebrochenen Ideale einer festen Hauptordnung $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ zu verschaffen. Wir fassen zu diesem Zweck diejenigen Maximalordnungen von $\mathfrak{K}$, die $\mathfrak{O}$ als Untermenge enthalten, als Punkte eines Raumes M auf und ordnen jeder Maximalordnung von M eine feste der nach § 2 zugehörigen Bewertungen zu. Dann besitzt jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{O}$ in jedem Punkte von M einen bestimmten Wert und ein bestimmtes Symbol, d. h. es definiert $\mathfrak{a}$ auf M eine „Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$" und eine „Symbolfunktion $\varphi(\mathfrak{P})$". In § 6 wird u. a. gezeigt, daß im algebraischen Spezialfall jedes Ideal der Hauptordnung $\mathfrak{O}^*$ durch seine Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$ und seine Symbolfunktion $\varphi(\mathfrak{P})$ eindeutig bestimmt ist. Für beliebige Körper dagegen leiten wir in dieser Hinsicht keinerlei Resultat ab.

Von allgemeiner und grundlegender Bedeutung sind die Untersuchungen von § 5 über die Frage: Wann gibt es zu einer beliebig gegebenen Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$ und einer beliebig gegebenen Symbolfunktion $\varphi(\mathfrak{P})$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{O}$, das gerade $f(\mathfrak{P})$ als Zahl- und $\varphi(\mathfrak{P})$ als Symbolfunktion besitzt? Es handelt sich uns um die Überwindung der charakteristischen Schwierigkeiten, die dann entstehen, wenn der Körper $\mathfrak{K}$ über einem in ihm enthaltenen „Grundkörper $\mathfrak{K}_\mathfrak{g}$" (im algebraischen Spezialfall über dem Körper $\mathfrak{K}_r$ der rationalen Zahlen) unendlich ist, d. h. aus $\mathfrak{K}_\mathfrak{g}$ nicht durch Adjunktion von endlich viel Elementen erzeugt werden kann. Unser Haupthilfsmittel bilden die Grundbegriffe der Topologie, deren Bedeutung für die Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen von mir bereits in K. I dargelegt wurde, und die vermutlich noch oft bei ähnlichen Fragen ihre Brauchbarkeit beweisen werden. Objekt der Topologisierung ist bei uns der Raum M. Bedeutet $\mathfrak{U}$ einen beliebigen über dem Grundkörper $\mathfrak{K}_\mathfrak{g}$ endlichen Unterkörper von $\mathfrak{K}$, so ordnen wir jedem Punkt $\mathfrak{P}$ von M eine Umgebung $\Phi_\mathfrak{U}(\mathfrak{P})$ zu durch die Festsetzung, daß die Maximalordnung $\mathfrak{P}'$ von M dann und nur dann zu $\Phi_\mathfrak{U}(\mathfrak{P})$ gehören soll, wenn sie mit $\mathfrak{U}$ den gleichen Durchschnitt besitzt wie $\mathfrak{P}$. Auf diese Weise wird M zu einem brauchbaren topologischen Raum. Normieren wir ferner die zu den Punkten von M gehörigen Bewertungen in geeigneter Weise, so ergibt sich sofort eine Reihe von Stetigkeitsbedingungen, denen $f(\mathfrak{P})$ und $\varphi(\mathfrak{P})$ notwendig genügen müssen, falls ein Ideal $\mathfrak{a}$ existieren soll, das gerade $f(\mathfrak{P})$ als Zahl- und $\varphi(\mathfrak{P})$ als Symbolfunktion besitzt.

Die Bedeutung der gewonnenen Resultate zeigt sich in § 6, wo wir (ebenso wie in § 7) $\mathfrak{K}$ zu einem unendlichen algebraischen Zahlkörper, $\mathfrak{O}^*$

zur Ordnung aller ganzen Zahlen von $\mathfrak{K}$ spezialisieren. Hier gelingt uns der Nachweis, daß die in § 5 gewonnenen Stetigkeitsbedingungen zusammen mit einigen leicht formulierbaren „trivialen" und „Beschränktheitsbedingungen" für die Existenz eines Ideals $\mathfrak{a}$ zu gegebenem $f(\mathfrak{P})$ und $\varphi(\mathfrak{P})$ nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind. Damit haben wir angesichts der Tatsache, daß ein Ideal von $\mathfrak{O}^*$ durch Zahl- und Symbolfunktion eindeutig bestimmt ist, einen befriedigenden Überblick über die sämtlichen Ideale von $\mathfrak{O}^*$ gewonnen. Insbesondere können wir entscheiden, wann zu gegebenem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein Ideal $\mathfrak{c}$ existiert, das der Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ genügt, und es zeigt sich, daß die sämtlichen Unterringe von $\mathfrak{K}$, die $\mathfrak{O}^*$ als Untermenge enthalten, gerade mit den sämtlichen Hauptordnungen von $\mathfrak{K}$ im Sinne unserer allgemeinen Definition übereinstimmen.

Die wichtigsten Ergebnisse von § 6 können unmittelbar auf die Theorie von ganz beliebigen Körpern algebraischer Funktionen einer Veränderlichen übertragen werden. Anders steht es mit den Untersuchungen von § 7 über „umkehrbare" Ideale, bei denen an entscheidender Stelle die Tatsache benutzt wird, daß jeder algebraische Zahlkörper aus dem Grundkörper der rationalen Zahlen durch Adjunktion von abzählbar unendlich vielen Elementen entsteht. Ein Ideal $\mathfrak{u}$ heißt umkehrbar, wenn ein reziprokes Ideal $\mathfrak{u}^{-1}$ existiert, das der Gleichung $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}^{-1} = \mathfrak{O}^*$ genügt. Die umkehrbaren Ideale bilden ersichtlich eine Gruppe hinsichtlich der Multiplikation, und zwar stellen sie in der Gesamtheit der Ideale von $\mathfrak{O}^*$ die größte Gruppe mit dem Einheitselement $\mathfrak{O}^*$ dar. Der Hauptsatz von § 7 besagt nun, daß ein Ideal $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{O}^*$ dann und nur dann umkehrbar ist, wenn es eine endliche Basis besitzt. Für den Körper aller algebraischen Zahlen, in dem jedes Ideal mit endlicher Basis Hauptideal ist, folgt daraus insbesondere, daß in ihm die Gruppe der umkehrbaren Ideale mit der Gruppe der Hauptideale zusammenfällt. Zur Würdigung der Ergebnisse von § 7 seien noch folgende Bemerkungen gestattet: Für die Theorie der Zahlkörper ist die Einführung der Ideale in doppelter Hinsicht wesentlich: Einerseits liefern die Primideale von $\mathfrak{O}^*$ die Bewertungen von $\mathfrak{K}$ und damit die Möglichkeit einer vernünftigen Teilbarkeitstheorie der Hauptideale. Andererseits erhalten wir durch die Zerlegung der Gruppe der umkehrbaren Ideale nach der Gruppe der Hauptideale die Klassengruppe, die in der Klassenkörpertheorie für die Konstruktion gewisser Erweiterungen des gegebenen Körpers $\mathfrak{K}$ fundamental ist. Die Klassenkörpertheorie bezieht sich allerdings zunächst nur auf endliche algebraische Zahlkörper. Gleichwohl legt die Rolle, die in ihr die Klassengruppe spielt, die Vermutung nahe, daß im Körper aller algebraischen Zahlen, der keiner algebraischen Erweiterung mehr fähig ist, die Klassengruppe gleich der Identität sein muß. Der Hauptsatz von § 7 bestätigt diese Vermutung, er zeigt wieder

einmal, daß der Körper aller algebraischen Zahlen wirklich eine so einfache Struktur besitzt, wie man es gleichsam von Rechts wegen von ihm erwarten kann.

§ 1.

Bewertung[3]); Begriff der Zahlentheorie.

Das Grundproblem und der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie kann folgendermaßen formuliert werden:

Frage: Wann ist das Element α aus dem Körper $\mathfrak{R}_r$ der rationalen Zahlen hinsichtlich der Ordnung $\mathfrak{O}_r$ der ganzen rationalen Zahlen durch das gleichfalls zu $\mathfrak{R}_r$ gehörige Element β teilbar, d. h. wann liegt der Quotient $\alpha \cdot \beta^{-1}$ in $\mathfrak{O}_r$?

Antwort: Man ordne jeder Primzahl p aus $\mathfrak{O}_r$ eine „Stelle“ P zu und verstehe für beliebiges $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{R}_r$ unter dem Wert von α in P die Differenz der Exponenten, mit denen die zu P gehörige Primzahl p bei einer Quotientendarstellung von α durch ganze Zahlen in Zähler und Nenner aufgeht. Dann gilt der Satz: α ist dann und nur dann durch β teilbar, wenn der Wert von α in bezug auf eine beliebige Stelle niemals kleiner ist als der Wert von β in bezug auf die gleiche Stelle.

Es bedeute von jetzt ab $\mathfrak{K}$ einen beliebigen Körper, unter einer *Ordnung* $\mathfrak{O}$ möge ein Unterring von $\mathfrak{K}$ verstanden werden, der das Einheitselement enthält, von $\mathfrak{K}$ selbst verschieden ist und die Eigenschaft besitzt, daß jedes Element aus $\mathfrak{K}$ als Quotient von Elementen aus $\mathfrak{O}$ geschrieben werden kann, daß also $\mathfrak{K}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{O}$ darstellt. Wir nennen das Körperelement α durch das Körperelement β *hinsichtlich* $\mathfrak{O}$ *teilbar*, wenn $\alpha \cdot \beta^{-1}$ zu $\mathfrak{O}$ gehört und fragen:

Welche Eigenschaften muß $\mathfrak{O}$ *besitzen, damit über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente von* $\mathfrak{K}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{O}$ *nach dem Vorbild der elementaren Zahlentheorie durch Einführung von „Stellen“ und zugehörigen „Bewertungen“ entschieden werden kann?*

Um die aufgeworfene Frage zu präzisieren, haben wir vor allem genau festzulegen, was unter einer Stelle mit zugehöriger Bewertung verstanden werden soll. Von einer *Bewertung von* $\mathfrak{K}$[3]) sprechen wir, wenn jedem

[3]) Ist B eine Bewertung von $\mathfrak{K}$ im Sinne des Textes und bedeutet w den Wert eines beliebigen Körperelementes $\alpha \neq 0$ in B, so erhält man eine „nichtarchimedische“ Bewertung von $\mathfrak{K}$ im Sinne von O. und R., wenn man für $\alpha \neq 0$ als neuen Wert e^{w} einführt und außerdem der 0 den Wert 0 verleiht. Um die Abweichung der Bewertungsdefinition des Textes von der üblichen Definition zu betonen, könnte man in unserem Fall von einer „Exponentenbewertung“ sprechen oder man könnte das Wort „Bewertung“ überhaupt fallen lassen und nach Henselschem Vorbild von „Primdivisoren“ reden.

Körperelement $\alpha \neq 0$ eindeutig eine reelle Zahl r, der Null das Symbol $+\infty$ als *Wert* zugeordnet ist, und wenn dabei die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. *Der Wert von* $\alpha \cdot \beta$ *ist gleich der Summe der Werte von* α *und* β. 2. *Der Wert von* $\alpha + \beta$ *ist nie kleiner als der kleinere der Werte von* α *und* β[4]). 3. *Nicht alle Elemente haben den Wert* 0. — Jeder Bewertung B ordnen wir eine durch B eindeutig bestimmte *Stelle* P zu und setzen fest, daß zwei verschiedenen Bewertungen B_1 und B_2 dann und nur dann die gleiche Stelle P entsprechen soll, wenn die Menge der Körperelemente mit nichtnegativen Exponenten bei B_1 und B_2 die gleiche ist. Die Stelle P soll *der Ordnung* $\mathfrak{O}$ *zugeordnet* heißen, wenn die sämtlichen Elemente von $\mathfrak{O}$ bei einer, und damit bei allen zu P gehörigen Bewertungen nichtnegativen Wert besitzen.

Mit Hilfe unserer Definitionen können wir nunmehr der oben angedeuteten Frage folgende scharfe Fassung geben:

Welche Eigenschaften muß die Ordnung $\mathfrak{O}$ *besitzen, daß für sie der folgende Satz gilt: Das Körperelement* α *ist dann und nur dann durch das Körperelement* β *hinsichtlich* $\mathfrak{O}$ *teilbar, wenn der Wert von* α *in bezug auf jede Bewertung* B*, die zu einer* $\mathfrak{O}$ *zugeordneten Stelle gehört, mindestens ebenso groß ist wie der entsprechende Wert von* β*?*

Eine Ordnung $\mathfrak{O}^*$, für die der angeführte Satz richtig ist, soll *Hauptordnung* heißen, und wir wollen sagen, daß sich „*auf* $\mathfrak{O}^*$ *eine Zahlentheorie in* $\mathfrak{K}$ *gründen lasse*“. Es handelt sich jetzt um eine Charakterisierung der Hauptordnungen.

Unter einer *Maximalordnung* $\mathfrak{P}$ wollen wir eine Ordnung verstehen, zu der es in $\mathfrak{K}$ keine Ordnung $\mathfrak{O}$ gibt, die echte Obermenge von $\mathfrak{P}$ ist.

Satz 1[5]). *Jeder Stelle* P *von* $\mathfrak{K}$ *entspricht eindeutig umkehrbar eine in* $\mathfrak{K}$ *enthaltene Maximalordnung* $\mathfrak{P}$*, und zwar besteht* $\mathfrak{P}$ *aus der Gesamtheit derjenigen Elemente, die in bezug auf die zu* P *gehörigen Bewertungen nichtnegativen Wert besitzen.*

a) Es sei P eine Stelle von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{O}$ die Menge der Elemente, die hinsichtlich der zu P gehörigen Bewertungen nichtnegativen Wert haben.

[4]) $+\infty$ ist als größer anzusehen als jede reelle Zahl, außerdem ist $+\infty + \infty = +\infty + w \quad +\infty$ zu setzen! Im folgenden sehen wir bei Bewertungsbetrachtungen überall von dem Nullelement ab. Sagen wir z. B. „bei einer bestimmten Bewertung B seien sämtliche Werte rational“, so meinen wir damit, daß bei B die Werte sämtlicher von 0 verschiedener Elemente rational sind usw.

[5]) Zu Satz 1 vgl. die Bemerkung von O. S. 272 Mitte. Aus dieser Bemerkung geht hervor, daß Ostrowski die sämtlichen Maximalordnungen eines beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$ bestimmt hat. Ich möchte an dieser Stelle der Hoffnung Ausdruck geben, daß die offenbar sehr wichtigen und interessanten Ostrowskischen Untersuchungen möglichst bald im Druck erscheinen.

Dann ergibt sich sofort aus den Grundeigenschaften der Bewertungen, daß $\mathfrak{O}$ Ordnung sein muß. (Man beachte insbesondere: $\mathfrak{O}$ ist von $\mathfrak{K}$ verschieden, weil wegen der Bewertungseigenschaften 1 und 3 mindestens ein Element existiert, das in bezug auf die zu P gehörigen Bewertungen negativen Wert besitzt). — Um noch $\mathfrak{O} = \mathfrak{P}$ als Maximalordnung nachzuweisen, hat man zu zeigen: Bedeutet ξ ein nicht in $\mathfrak{O}$ enthaltenes Körperelement, $\mathfrak{P}(\xi)$ den Ring der Polynome in ξ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{P}$, so ist stets $\mathfrak{P}(\xi) = \mathfrak{K}$. Es sei nun r der (negative) Wert von ξ in bezug auf eine feste, zu P gehörige Bewertung B, η sei ein beliebiges Körperelement vom Werte s hinsichtlich B. Dann können wir die ganze positive Zahl n so bestimmen, daß $r \cdot n < s$, $s - r \cdot n > 0$, und daraus folgt sofort, daß η in $\mathfrak{P}(\xi)$ auftritt, weil $\vartheta = \eta \cdot \xi^{-n}$ in bezug auf B den positiven Wert $s - r \cdot n$ hat und somit zu $\mathfrak{P}$ gehört.

b) Daß zu jeder Maximalordnung $\mathfrak{P}$ eine Bewertung von $\mathfrak{K}$ existiert, bei der gerade die Elemente von $\mathfrak{P}$ nichtnegativen Wert besitzen, wird in § 2 gezeigt werden.

Aus Satz 1 ergibt sich: Die der Ordnung $\mathfrak{O}$ zugeordneten Stellen entsprechen eindeutig umkehrbar denjenigen Maximalordnungen, die $\mathfrak{O}$ als Untermenge enthalten. Wir werden daher zweckmäßig diese Maximalordnungen als $\mathfrak{O}$ *zugeordnete Maximalordnungen* bezeichnen. Ob zu beliebigen $\mathfrak{O}$ stets zugeordnete Maximalordnungen existieren, ist eine Frage, die hier unerörtert bleiben soll [6]). Auf jeden Fall beweisen wir mit Hilfe von Satz 1:

Satz 2. $\mathfrak{O}$ *ist dann und nur Hauptordnung, wenn es den Durchschnitt seiner sämtlichen zugeordneten Maximalordnungen darstellt.*

Beim Beweis darf man voraussetzen, daß es zu $\mathfrak{O}$ überhaupt eine zugeordnete Maximalordnung gibt [6]), da $\mathfrak{O}$ sonst sicher nicht Hauptordnung ist. Man hat dann nur zu beachten: Bedeutet $\mathfrak{O}^*$ den Durchschnitt sämtlicher $\mathfrak{O}$ zugeordneter Maximalordnungen, so gehört $\alpha \cdot \beta^{-1}$ nach Satz 1 dann und nur dann zu $\mathfrak{O}^*$, wenn α bei keiner Bewertung, die zu einer $\mathfrak{O}$ zugeordneten Stelle gehört, kleineren Exponenten besitzt als β.

§ 2.

Die Maximalordnungen.

Vorbemerkung. Den Untersuchungen der folgenden Paragraphen liegt jeweils eine feste Ordnung $\mathfrak{O}$ zugrunde, auf die sich, sofern nichts

[6]) Es ist mir — wenigstens so wie ich den Beweis führen wollte, möglichst nur unter Benutzung der Grundbegriffe der Wohlordnung — nicht gelungen, zu zeigen, daß zu jeder Ordnung $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ stets eine $\mathfrak{O}$ enthaltende Maximalordnung existiert. Gleichwohl vermute ich dringend die Richtigkeit dieser Tatsache.

anderes ausdrücklich bemerkt wird, alle Angaben über Teilbarkeitsverhältnisse beziehen. Ein Körperelement α heißt *ganz*, wenn es zu $\mathfrak{O}$ gehört, ein ganzes Element α heißt *Einheit*, wenn auch α^{-1} ganz ist. Zwei Körperelemente, die sich nur um einen Einheitsfaktor unterscheiden, bezeichnen wir als *äquivalent*. Ist α Teiler von β, ohne mit β äquivalent zu sein, so nennen wir α einen *echten Teiler* von β. Das Körperelement ϱ heißt von $\mathfrak{O}$ *ganz abhängig*, wenn es einer Gleichung $\varrho^n + \alpha_1 \varrho^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0$ mit Koeffizienten α_i aus $\mathfrak{O}$ genügt.

Unter einem *Ideal* $\mathfrak{a}$ verstehen wir einen $\mathfrak{O}$-Modul [7]), der mindestens ein von 0 verschiedenes Element enthält; besteht $\mathfrak{a}$ ausschließlich aus ganzen Zahlen, so sprechen wir von einem *ganzen Ideal*. Ein ganzes Ideal wird *Maximalideal* [8]) genannt, wenn es außer dem *Einheitsideal* $\mathfrak{o} = \mathfrak{O}$ kein ganzes Ideal als echten Idealteiler besitzt.

In § 2 und § 3 handelt es sich um die Untersuchung einer Maximalordnung $\mathfrak{O} = \mathfrak{P}$.

Satz 3. *Ist ξ eine Nichteinheit, α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{P}$, so ist stets eine Potenz von ξ durch α teilbar.*

Da ξ Nichteinheit ist, tritt ξ^{-1} nicht in $\mathfrak{P}$ auf, es wird daher $\mathfrak{P}(\xi^{-1}) = \mathfrak{R}$ und es gilt insbesondere eine Gleichung $\alpha^{-1} = p(\xi^{-1})$, wobei $p(x)$ ein Polynom, etwa vom Grade n, mit Koeffizienten aus $\mathfrak{P}$ bedeutet. Wir haben dann $\alpha^{-1} = \xi^{-n} \cdot \beta$; β ganz, d. h. es ist ξ^n durch α teilbar. Sind α und β Nichteinheiten aus $\mathfrak{P}$, so muß nach Satz 3 eine Potenz von β und damit auch eine Potenz von $\alpha + \beta$ durch die Nichteinheit α teilbar sein; es ist daher gleichzeitig mit α und β stets auch $\alpha + \beta$ Nichteinheit. Daraus folgt mühelos:

Hilfssatz 1. *Es gibt in $\mathfrak{P}$ nur ein einziges Maximalideal $\mathfrak{p}$, und zwar besteht $\mathfrak{p}$ aus der Gesamtheit der Nichteinheiten aus $\mathfrak{P}$* [9]).

Hilfssatz 2. *Jedes von $\mathfrak{P}$ ganz abhängige Element gehört zu $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ ist „ganz abgeschlossen“.*

Es sei ϱ ganz abhängig von $\mathfrak{P}$, und zwar sei ϱ Nullstelle der Gleichung $\varrho^n + \alpha_1 \varrho^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{P}$. Dann läßt sich mit Hilfe dieser Gleichung jedes Element von $\mathfrak{P}(\varrho)$ als Linearform in $\varepsilon, \varrho, \varrho^2, \ldots, \varrho^{n-1}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{P}$ darstellen. Wählen wir nun

[7]) Also ein System von Körperelementen, das gleichzeitig mit α und β stets $\alpha - \beta$ und gleichzeitig mit α stets $\alpha \cdot a$ für beliebiges a aus $\mathfrak{O}$ enthält. Man beachte, daß in unsere Idealdefinition keinerlei Endlichkeitsvoraussetzung eingeht.

[8]) Jedes Maximalideal ist im üblichen Sinne Primideal, aber natürlich braucht in beliebigen Ordnungen nicht jedes ganze Primideal maximal zu sein.

[9]) Aus Satz 3 folgt noch, daß jedes ganze Ideal von $\mathfrak{P}$ nach der üblichen Bezeichnungsweise ein „zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal“ darstellt.

die Nichteinheit ξ aus $\mathfrak{P}$ so, daß die Produkte $\xi \cdot \varrho^i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ sämtlich ganz werden, so muß das Produkt von ξ mit einem beliebigen Element aus $\mathfrak{P}(\varrho)$ ganz sein. Daraus folgt aber, daß $\mathfrak{P}(\varrho)$ das Element ξ^{-2} nicht enthält, also sicher von $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Wegen der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{P}$ ist daher $\mathfrak{P}(\varrho) = \mathfrak{P}$, ϱ gehört zu $\mathfrak{P}$.

Durch Kombination von Hilfssatz 1 und Hilfssatz 2 beweisen wir nunmehr:

Satz 4. *Sind α und β beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}$, so ist entweder α durch β oder β durch α teilbar.*

Es sei etwa α durch β unteilbar, also $\alpha \cdot \beta^{-1} = \sigma$ nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{P}(\sigma) = \mathfrak{R}$, insbesondere gilt für eine beliebige Nichteinheit η aus $\mathfrak{P}$ eine Gleichung $\eta^{-1} = \alpha_0 \cdot \sigma^n + \alpha_1 \sigma^{n-1} + \ldots + \alpha_n$ mit Koeffizienten α_i aus $\mathfrak{P}$. Durch Umformen dieser Gleichung erhalten wir:

$$0 = (\alpha_n \cdot \eta - \varepsilon) \cdot (\sigma^{-1})^n + \alpha_{n-1} \cdot \eta \cdot (\sigma^{-1})^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \cdot \eta,$$

σ^{-1} ist also Nullstelle des Polynoms

$$q(x) = (\alpha_n \cdot \eta - \varepsilon) x^n + \alpha_{n-1} \cdot \eta \cdot x^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \cdot \eta$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{P}$. In $q(x)$ ist aber der Koeffizient von x_n als Differenz des Einheitselements und einer Nichteinheit nach Hilfssatz 1 Einheit, wir können daher durch ihn (in $\mathfrak{P}$) durchdividieren, und erkennen daß σ^{-1} von $\mathfrak{P}$ ganz abhängt. Nach Hilfssatz 2 gehört daher σ^{-1} zu $\mathfrak{P}$, d. h. unter der Voraussetzung, daß α durch β unteilbar ist, konnten wir zeigen, daß β durch α teilbar sein muß.

Auf Grund von Satz 3 und Satz 4 beweisen wir nunmehr:

Satz 5. *Es gibt eine und nur eine Bewertung der Elemente von $\mathfrak{R}$, bei der gerade die Elemente von $\mathfrak{P}$ nichtnegativen Wert haben und insbesondere eine beliebig vorgeschriebene Nichteinheit π den Wert 1 besitzt.*

Den Beweis führen wir in drei Schritten:

a) Konstruktion der Bewertung. Alle Einheiten erhalten den Wert 0. Ist σ ein nicht in $\mathfrak{P}$ enthaltenes Element, so ist σ^{-1} nach Satz 4 Nichteinheit aus $\mathfrak{P}$, und es soll $-w$ als Wert von σ gewählt werden, falls w den (hier als bekannt vorausgesetzten) Wert von σ^{-1} bedeutet. Den Wert einer Nichteinheit ϱ aus $\mathfrak{P}$ bestimmen wir durch das folgende Konstruktionsverfahren:

Es sei (was nach Satz 3 und Satz 4 stets möglich ist) für $i = 1, 2, 3, \ldots$ die ganze nichtnegative Zahl n_i so gewählt, daß π^{n_i} einen echten Teiler von ϱ^{10^i} darstellt, während π^{n_i+1} durch ϱ^{10^i} teilbar ist. Dann gelten die Ungleichungen $10 \cdot n_{i-1} \leqq n_i < 10 \cdot (n_{i-1} + 1)$; denn ist $\pi^{n_{i-1}}$ echter Teiler von $\varrho^{10^{i-1}}$ bzw. $\pi^{n_{i-1}+1}$ Vielfaches von $\varrho^{10^{i-1}}$, so ist auch $\pi^{10 \cdot n_{i-1}}$ echter

Teiler von ϱ^{10^i} bzw. $\pi^{10\cdot(n_{i-1}+1)}$ Vielfaches von ϱ^{10^i}. Die Zahlen $n_i \cdot 10^{-i}$ liefern uns daher die Approximationsbrüche eines bestimmten nicht abbrechenden Dezimalbruchs; die durch diesen Dezimalbruch dargestellte positive reelle Zahl soll zum Wert von ϱ ernannt werden. Bei dieser Festsetzung wird insbesondere $0{,}99\ldots = 1$ der Wert von π.

b) Gültigkeit der Bewertungseigenschaften 1 und 2. α) Sind ϱ und σ zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}$, so dürfen wir nach Satz 4 voraussetzen, daß etwa σ durch ϱ teilbar ist. Dann ist aber auch $\varrho + \sigma$ durch ϱ teilbar, und daraus folgt sofort die Gültigkeit der Bewertungseigenschaft 2, sofern man nur beachtet, daß bei der in a) gegebenen Einführung der Bewertung kein Vielfaches von ϱ einen kleineren Wert zuerteilt bekommt als ϱ selbst. β) Ist π^{n_i} bzw. π^{m_i} echter Teiler von ϱ^{10^i} bzw. σ^{10^i}, π^{n_i+1} bzw. π^{m_i+1} Vielfaches von ϱ^{10^i} bzw. σ^{10^i}, so ist $\pi^{n_i+m_i}$ echter Teiler, $\pi^{n_i+m_i+2}$ Vielfaches von $(\varrho\sigma)^{10^i}$. Aus dieser Tatsache erschließt man mühelos die Richtigkeit der Bewertungseigenschaft 1 für den Fall, daß ϱ und σ Nichteinheiten aus $\mathfrak{P}$ sind; der allgemeine Fall erledigt sich dann gleichfalls ohne Schwierigkeit.

c) Eindeutigkeit. Um zu beweisen, daß es nicht mehr als eine Bewertung im Sinne von Satz 5 geben kann, brauchen wir nur zu zeigen, daß die Werte der ganzen Nichteinheiten bei einer derartigen Bewertung eindeutig bestimmt sind. Das ergibt sich aber aus dem Umstand, daß der Wert w der ganzen Nichteinheit ϱ der Ungleichung $n_i < 10^i \cdot w \leqq n_i + 1$ genügen muß, falls 1 der Wert von π ist und falls π^{n_i} einen echten Teiler, π^{n_i+1} ein Vielfaches von ϱ^{10^i} darstellt.

Nachdem durch Satz 5 der in Satz 1 behauptete eindeutig umkehrbare Zusammenhang zwischen den „Stellen“ und den Maximalordnungen aus $\mathfrak{R}$ endgültig gesichert ist, lassen wir den in § 1 benutzten Hilfsbegriff der Stelle ganz fallen und reden statt von den zu einer bestimmten Stelle gehörigen von den zu der entsprechenden Maximalordnung gehörigen Bewertungen. Über den Zusammenhang zwischen zwei Bewertungen, die zur selben Maximalordnung gehören, gibt Auskunft:

Satz 6 [10]). *Es seien B_1 und B_2 zwei zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertungen,*

[10]) Es sei betont, daß es im allgemeinen auch zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertungen geben wird, bei denen kein einziges Körperelement den Wert 1 besitzt. Gibt es z. B. eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung B, bei der die Werte sämtlicher Körperelemente rational sind, so erhält man eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung der genannten Art, in dem man die Werte der Körperelemente in B sämtlich mit einer festen irrationalen Zahl multipliziert.

Nach dem Vorbild der algebraischen Zahlkörper (vgl. § 6 Satz 24) könnte man vermuten: Hat in der beliebigen Bewertung B des beliebigen Körpers $\mathfrak{R}$ ein Körperelement den Wert 1, so sind alle Werte in B rational. Daß diese Vermutung falsch

(Fortsetzung der Fußnote [10]) auf nächster Seite.)

α sei eine Nichteinheit vom Werte w_1 bzw. w_2 in B_1 bzw. B_2. Dann entsteht B_2 aus B_1 einfach dadurch, daß man die Werte, die die Körperelemente in B_1 besitzen, mit $\frac{w_2}{w_1}$ multipliziert.

In der Tat, durch die in Satz 6 angegebene Prozedur erhält man aus B_1 eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung B_2', bei der α den Wert w_2 hat, und aus der Eindeutigkeitsbehauptung von Satz 5 ergibt sich unmittelbar die Gleichung $B_2' = B_2$.

§ 3.

Idealtheorie in einer Maximalordnung[11].

Den Betrachtungen von § 3 liegt eine feste, zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung B zugrunde. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{P}$, so verstehen wir unter dem *Wert von* $\mathfrak{a}$ die untere Grenze der Werte der in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Elemente; dem Ideale $\mathfrak{a}$ vom Werte w soll das *Symbol e oder u* zugeordnet werden, je nachdem ob es in $\mathfrak{a}$ Elemente vom Werte w selbst gibt oder nicht[12]. (Insbesondere erhält durch unsere Festsetzung $\mathfrak{R}$ als Ideal den Wert $-\infty$ und das Symbol u.)

Satz 7. *Jedes Ideal ist durch Wert und Symbol eindeutig bestimmt. Ein Ideal vom Symbol e ist stets Hauptideal, dagegen besitzt ein Ideal vom Symbol u niemals eine endliche Basis.*

Der erste Teil von Satz 7 folgt aus der Tatsache, daß das Ideal $\mathfrak{a}$ vom Wert w und vom Symbol e bzw. u aus allen und nur den Körperelementen besteht, deren Wert mindestens gleich w bzw. größer als w ist. Um die Richtigkeit des zweiten Teils einzusehen, beachte man: Ist $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein Ideal mit endlicher Basis, und hat etwa a_1 den kleinsten Wert unter den a_i, so ist $\mathfrak{a} = (a_1)$ Hauptideal, und es muß $\mathfrak{a}$ das Symbol e besitzen,

---

ist, zeigt folgendes Beispiel: Es sei $\mathfrak{K}$ der Körper der rationalen Funktionen in zwei Variablen x und y mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Setzt man formell $x = t$, $y = t^\varrho$ mit reellem irrationalem ϱ, so ergibt sich für jedes Element $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ eine eindeutig bestimmte Darstellung $\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} a_i t_i^{\alpha_i}$, wobei die a_i nicht sämtlich verschwindende komplexe Zahlen, die α_i (positive oder negative) reelle Zahlen bedeuten. Ordnet man jedem α die kleinste der Zahlen α_i als Wert zu, so erhält man, wie leicht zu sehen, *eine Bewertung von $\mathfrak{K}$, bei der 1 der Wert von x und die irrationale Zahl ϱ der Wert von y ist.*

[11]) Zu § 3 vgl. R. §§ 5–8, sowie K. II § 2.

[12]) Vgl. K. II § 2. Ideale vom Symbol u kommen in verschleierter Form bereits bei R. vor. Gibt es nämlich Elemente von beliebig kleinem positivem Wert in $\mathfrak{P}$, so ist jede Kongruenz „$(\mathrm{mod}\ m)^*$“ im Sinne von R. eine Kongruenz nach einem Ideal vom Symbol u.

da sein Wert gleich dem Werte des in ihm enthaltenen Elements a_1 ist. Bedeutet umgekehrt $\mathfrak{a}$ ein Ideal vom Werte w und vom Symbole e, so gibt es in $\mathfrak{P}$ Elemente vom Wert w, und es liefert jedes derartige Element eine eingliedrige Basis von $\mathfrak{a}$.

Für die Multiplikation der Ideale gilt:

Satz 8. *Der Wert des Produktes zweier Ideale ist gleich der Summe der Werte der einzelnen Faktoren. Das Symbol des Produktes ist dann und nur dann gleich e, wenn jeder Faktor das Symbol e besitzt.*

Zum Beweis berücksichtige man die einschlägigen Definitionen, sowie den für die Multiplikation von Elementen gültigen Satz von der Addition der Werte!

Satz 9. *Gibt es in $\mathfrak{P}$ keine Elemente von beliebig kleinem positivem Wert, so existieren außer $\mathfrak{R}$ keine Ideale vom Symbole u, und es bilden die Ideale vom Symbole e (hinsichtlich der Multiplikation) eine unendliche zyklische Gruppe mit dem Einheitsideal $\mathfrak{o}$ als Einheits- und dem Maximalideal $\mathfrak{p}$ als erzeugendem Element*[13]).

Gibt es dagegen in $\mathfrak{P}$ Elemente von beliebig kleinem positivem Wert, so bilden die von $\mathfrak{R}$ verschiedenen Ideale vom Symbole u eine zur Additionsgruppe der reellen Zahlen isomorphe Gruppe mit dem Einheitselement $\mathfrak{p}$, während die Gesamtheit der Ideale vom Symbole e eine Gruppe mit dem Einheitselement $\mathfrak{o}$ darstellt, die zu einer ohne besondere Voraussetzungen nicht näher zu charakterisierenden Untergruppe der Additionsgruppe der reellen Zahlen isomorph ist[14]).

a) Gibt es in $\mathfrak{P}$ keine Elemente von beliebig kleinem positivem Wert, so muß in $\mathfrak{P}$ ein Element π von kleinstem positivem Wert existieren, und man zeigt auf Grund der Bewertungseigenschaft 1 mit bekannten Methoden der elementaren Zahlentheorie, daß jede Nichteinheit aus $\mathfrak{P}$ einer positiven und damit jedes Element aus $\mathfrak{R}$ einer ganzzahligen Potenz von π äquivalent ist. Es stellen daher die nach Satz 7 zum Symbol e gehörigen Ideale $\mathfrak{p} = (\pi)$, $\mathfrak{p}^2 = (\pi^2)$, ..., $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^0 = (\pi^0)$, $\mathfrak{p}^{-1} = (\pi^{-1})$, $\mathfrak{p}^{-2} = (\pi^{-2})$ die sämtlichen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen Ideale von $\mathfrak{P}$ dar.

b) Falls es in $\mathfrak{P}$ Elemente von beliebig kleinem positivem Wert gibt, erkennt man mit Hilfe der Bewertungseigenschaft 1 und der Tatsache, daß die von 0 verschiedenen Körperelemente hinsichtlich der Multiplikation eine Gruppe bilden, leicht, daß in $\mathfrak{P}$ Elemente existieren müssen, deren Wert von einer beliebigen reellen Zahl w nach oben oder unten beliebig

[13]) Vgl. R., § 6.

[14]) Vgl. K. II, § 2. Was die Multiplikationsgruppe der Ideale vom Symbol e angeht, so vgl. man das Beispiel von Anm. [10]).

wenig abweicht, ohne mit w identisch zu sein. Es gibt daher in $\mathfrak{P}$ zu beliebigem reellem w stets ein Ideal vom Werte w und vom Symbol u; insbesondre wird das zum Wert 0 und Symbol u gehörige Ideal durch das alle Elemente von positivem Wert umfassende Maximalideal $\mathfrak{p}$ dargestellt. Aus dem Bewiesenen ergibt sich angesichts der Multiplikationsregeln von Satz 8 sofort die im zweiten Abschnitt von Satz 9 über die Gruppeneigenschaft der Ideale vom Symbole u aufgestellte Behauptung, während die im gleichen Abschnitt über die Gruppe der Ideale vom Symbole e gemachte Bemerkung trivial ist. Stellt der den Untersuchungen zugrunde liegende Körper $\mathfrak{K}$ einen algebraischen Zahlkörper dar, so ist, wie wir später (Satz 24) sehen werden, die Multiplikationsgruppe der Ideale vom Symbole e immer zu einer Untergruppe der Additionsgruppe der *rationalen* Zahlen isomorph. In allgemeinen Körpern $\mathfrak{K}$ dagegen ist, wie man durch Beispiele zeigen kann, diese Tatsache nicht immer richtig[10]). Man braucht daher wirklich zu tiefergehenden Aussagen über die Multiplikationsgruppe der Ideale vom Symbole e spezielle Annahmen über den zugrunde liegenden Körper $\mathfrak{K}$.

Als naheliegende Folgerung aus Satz 9 sei noch hervorgehoben:

Im Bereich der ganzen Ideale von $\mathfrak{P}$ bricht dann und nur dann jede Kette von echten Teilern im Endlichen ab, wenn es in $\mathfrak{P}$ keine Elemente von beliebig kleinem positivem Wert gibt.

§ 4.

Zahl- und Symbolfunktionen bei Idealen in Hauptordnungen.

Nachdem die Frage nach dem Aufbau einer Maximalordnung $\mathfrak{P}$ durch die Ergebnisse von § 2 und § 3 hinreichend geklärt ist, wenden wir uns zur Untersuchung einer beliebigen Hauptordnung $\mathfrak{O}$. Das Problem der Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente von $\mathfrak{K}$ hinsichtlich $\mathfrak{O}$ kann nach Satz 2 von § 1 durch die Einführung der $\mathfrak{O}$ zugeordneten Maximalbereiche und ihrer zugehörigen Bewertungen erledigt werden. Indes liegt die Frage nahe, ob man nicht darüber hinaus mit Hilfe der zugeordneten Maximalordnungen zu einem genaueren Einblick in die für beliebige Ideale aus $\mathfrak{O}$ gültigen Teilbarkeitsverhältnisse gelangen kann.

Um hier weiterzukommen, *fassen wir die $\mathfrak{O}$ zugeordneten Maximalordnungen $\mathfrak{P}$ als Punkte eines Raumes* M *auf*, den wir in § 5 durch Einführung eines geeigneten Umgebungsbegriffs zu einem topologischen Raum machen werden. Ist jedem Punkt von M durch irgendeine Vorschrift eine reelle Zahl oder das Zeichen $-\infty$ zugeordnet, so sprechen wir von einer *Zahlfunktion* $f(\mathfrak{P})$ auf M. Von einer *Symbolfunktion* $\varphi(\mathfrak{P})$ auf M da-

gegen soll gesprochen werden, wenn jedem Punkt von M eines der Symbole e oder u zugeordnet ist.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{O}$, so besitzt für beliebiges $\mathfrak{P}$ das Ideal $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{P}$ nach § 3 stets eines und nur eines der Symbole e oder u; das Ideal $\mathfrak{a}$ „erzeugt“ daher eine bestimmte Symbolfunktion $\varphi(\mathfrak{P})$ auf M, die wir als *die zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Symbolfunktion* oder kurz als *die Symbolfunktion von* $\mathfrak{a}$ bezeichnen.

Um jedem Ideal $\mathfrak{a}$ eine für $\mathfrak{a}$ charakterische Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$ auf M zuzuordnen, müssen wir zunächst in jedem $\mathfrak{P}$ von M eine bestimmte zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung B festlegen, wir müssen, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, eine *B-Belegung von* M definieren. Ist eine feste B-Belegung von M gegeben, so erhalten wir zu $\mathfrak{a}$ eine bestimmte Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$, wenn wir jedem $\mathfrak{P}$ von M auf Grund von § 3 den Wert von $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{P}$ in der zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Bewertung B zuordnen. $f(\mathfrak{P})$ soll *die zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Zahlfunktion* oder kurz *die Zahlfunktion von* $\mathfrak{a}$ hinsichtlich der gegebenen B-Belegung heißen. Der auf die B-Belegung bezügliche Zusatz bleibt fort, sobald kein Mißverständnis zu befürchten ist. Bei den Sätzen von § 4 bezieht sich die Zahlfunktion eines Ideals immer auf eine feste, ein für allemal gegebene B-Belegung.

Die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ möge *regulär* heißen, wenn in ihr jedes Ideal durch Zahl- und Symbolfunktion eindeutig bestimmt ist. Dann gilt zunächst:

Satz 10. *Für die Regularität der Hauptordnung* $\mathfrak{O}$ *ist notwendig und hinreichend, daß jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{O}$ *den Durchschnitt der sämtlichen Ideale* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{P}$ *für beliebiges* $\mathfrak{P}$ *aus* M *darstellt.*

Da in $\mathfrak{P}$ jedes Ideal durch Wert und Symbol eindeutig bestimmt ist, ist für beliebiges $\mathfrak{P}$ (aus M) immer $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{P} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{P}$, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gleiche Zahl- und Symbolfunktion besitzen; umgekehrt stellt der Durchschnitt aller Ideale $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{P}$ ein Ideal $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{O}$ dar, das Teiler von $\mathfrak{a}$ ist und mit $\mathfrak{a}$ in Zahl- und Symbolfunktion übereinstimmt. Aus diesen Überlegungen folgt die Behauptung, sowie:

Satz 11. *Das Ideal* $\mathfrak{a}_1$ *mit der Zahl- bzw. Symbolfunktion* $f_1(\mathfrak{P})$ *bzw.* $\varphi_1(\mathfrak{P})$ *ist nur dann durch das Ideal* $\mathfrak{a}_2$ *mit der Zahl- bzw. Symbolfunktion* $f_2(\mathfrak{P})$ *bzw.* $\varphi_2(\mathfrak{P})$ *teilbar, wenn die Funktion* $f_1(\mathfrak{P})$ *in keinem Punkte von* M *kleiner ist als die Funktion* $f_2(\mathfrak{P})$, *und wenn außerdem stets* $\varphi_1(\mathfrak{P}_0) = u$, *falls* $f_1(\mathfrak{P}_0) = f_2(\mathfrak{P}_0)$, $\varphi_2(\mathfrak{P}_0) = u$.

Ist $\mathfrak{O}$ *regulär, so ist die angegebene Teilbarkeitsbedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.*

Nehmen die Funktionen $f_1(\mathfrak{P})$ und $f_2(\mathfrak{P})$ nirgends auf M den Wert $-\infty$ an, so ist die Bedeutung von $f_1(\mathfrak{P}) \pm f_2(\mathfrak{P})$ klar. Setzen wir noch fest,

daß $-\infty + r = -\infty + (-\infty) = -\infty$ sein soll für beliebiges reelles r, so kann wenigstens die Addition für ganz beliebige Zahlfunktionen definiert werden, und wir erhalten:

Satz 12. *Die Zahlfunktion des Produktes zweier oder mehrerer Ideale ist gleich der Summe der Zahlfunktionen der einzelnen Faktoren. Die Symbolfunktion des Produktes ist in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}_0$ dann und nur dann gleich e, wenn die Symbolfunktion jedes einzelnen Faktors in $\mathfrak{P}_0$ gleich e ist.*

Beweis unmittelbar aus den Definitionen und aus Satz 8 von § 3.
Ein Ideal, dessen Symbolfunktion überall auf M gleich e ist, soll *überall endlich* heißen. Die Zahlfunktion eines überall endlichen Ideals kann ersichtlich nirgends den Wert $-\infty$ annehmen. Die Differenz der Zahlfunktionen zweier überall endlicher Ideale ist daher definiert, und wir erhalten aus Satz 12:

Satz 13. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ überall endliche Ideale mit den Zahlfunktionen $f_1(\mathfrak{P})$ bzw. $f_2(\mathfrak{P})$ und genügt $\mathfrak{c}$ der Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$, so muß $\mathfrak{c}$ ein überall endliches Ideal mit der Zahlfunktion $f_1(\mathfrak{P}) - f_2(\mathfrak{P})$ sein.*

In einer regulären Ordnung besitzt daher die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ bei gegebenen überall endlichen Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wenn überhaupt eine, so nur eine einzige Lösung $\mathfrak{c}$.

Auch für Ideale mit beliebigen Symbolfunktionen kann man ein zu Satz 13 analoges Kriterium für „Teilbarkeit im Produktsinne" aufstellen. Doch wird dasselbe in der Formulierung recht umständlich, auch braucht bei beliebig vorgegebenem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sogar in einer regulären Hauptordnung das Ideal $\mathfrak{c}$ durch die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ nicht eindeutig bestimmt zu sein. Wir gehen daher auf diesen Punkt nicht näher ein und heben nur noch eine andere Fassung der Definition der Zahl- und Symbolfunktion eines Ideals hervor, die uns in § 6 sehr nützlich sein wird:

Satz 14. *Die Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$ und die Symbolfunktion $\varphi(\mathfrak{P})$ des Ideals $\mathfrak{a}$ können auch folgendermaßen definiert werden: Enthält $\mathfrak{a}$ Elemente vom Wert r in der zu $\mathfrak{P}_0$ gehörigen Bewertung B_0, aber keine Elemente von kleinerem Wert als r, so werde $f(\mathfrak{P}_0) = r$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$ gesetzt. Enthält $\mathfrak{a}$ Elemente von beliebig kleinem Wert in B_0, so setze man $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$. Enthält schließlich $\mathfrak{a}$ kein Element vom Wert $s \leqq r$ in B_0, wohl aber für beliebig kleines ε Elemente, deren Wert der Ungleichung $r + \varepsilon \geqq w > r$ genügt, so ist $f(\mathfrak{P}_0) = r$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$ zu setzen.*

Beweis unmittelbar aus der Definition von Wert und Symbol von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{P}_0$.

§ 5.

Topologisierung des Raumes M der Maximalordnungen[15].

Die Ergebnisse von § 4, insbesondere Satz 13 legen die Frage nahe, wann zu einer gegebenen Zahl- bzw. Symbolfunktion $f(\mathfrak{P})$ bzw. $\varphi(\mathfrak{P})$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ existiert, das gerade $f(\mathfrak{P})$ als Zahl- und $\varphi(\mathfrak{P})$ als Symbolfunktion besitzt. In § 6 wird die aufgeworfene Frage für unendliche algebraische Zahlkörper vollständig erledigt werden. Haupthilfsmittel ist dabei die „Topologisierung" des Raumes M, die uns gestattet, die bekannten Ergebnisse über endliche algebraische Zahlkörper zum Studium der unendlichen heranzuziehen. Im übrigen kann, wie jetzt gezeigt werden soll, die Topologisierung von M bei beliebigem Grundkörper $\mathfrak{K}$ durchgeführt werden. Sie führt auch im allgemeinen Fall wenigstens zu einem gewissen Einblick in die Natur der Zahl- und Symbolfunktion eines Ideals.

Ist $\mathfrak{U}$ ein beliebiger Unterkörper des beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$ eine Maximalordnung aus $\mathfrak{K}$, B eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung, und ist der Durchschnitt $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{U}$[16] von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{U}$ verschieden, so erhält man eine Bewertung $B_{\mathfrak{U}}$ von $\mathfrak{U}$ dadurch, daß man jedem Element von $\mathfrak{U}$ den Wert zuerteilt, den es in B besitzt. $B_{\mathfrak{U}}$ soll *die durch B erzeugte Bewertung* von $\mathfrak{U}$ heißen. Aus der Tatsache, daß in $B_{\mathfrak{U}}$ alle und nur die Elemente von $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{U}$ nichtnegativen Wert haben, und aus Satz 1 von § 1 folgt sofort:

Satz 15. *Bedeutet $\mathfrak{P}$ eine beliebige Maximalordnung, $\mathfrak{U}$ einen beliebigen Unterkörper von $\mathfrak{K}$, so ist der Durchschnitt $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{U}$ entweder gleich $\mathfrak{U}$ oder gleich einer Maximalordnung von $\mathfrak{U}$.*

Beachtet man ferner, daß eine beliebige zu $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{U}$ gehörige Bewertung $B_{\mathfrak{U}}$ durch die Forderung, eine beliebige Nichteinheit aus $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{U}$ solle in $B_{\mathfrak{U}}$ einen bestimmten positiven Wert besitzen, eindeutig festgelegt ist, so erhält man:

Satz 16. *Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Maximalordnungen aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}$, B_1 und B_2 seien zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gehörige Bewertungen. Besitzt dann ein beliebiges Element $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{U}$ in B_1 und B_2 den gleichen von 0 verschiedenen Wert, so besitzen überhaupt sämtliche Elemente aus $\mathfrak{U}$ in B_1 und B_2 gleichen Wert.*

[15] Die erste Anregung zur Anwendung der topologischen Methoden auf die Zahlentheorie verdanke ich einem Gespräch mit J. v. Neumann. Die Begriffsbildungen, die in § 5 eingeführt werden, sind ganz analog zu denen, die ich in K. I benutzt habe.

[16] Das Zeichen $\cap$ benutze ich stets zur Bezeichnung des mengentheoretischen Durchschnitts.

Es sei jetzt wieder wie in § 4 $\mathfrak{O}$ eine feste Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$, M der Raum der $\mathfrak{O}$ zugeordneten $\mathfrak{P}$, unter dem *Grundkörper* $\mathfrak{K}_g$ möge der Primkörper aus $\mathfrak{K}$ oder ein beliebiger in $\mathfrak{O}$ und damit in sämtlichen $\mathfrak{P}$ von M enthaltener Unterkörper von $\mathfrak{K}$ verstanden werden. Ferner soll $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_g$ nicht endlich sein, d. h. es soll $\mathfrak{K}$ nicht aus $\mathfrak{K}_g$ durch Adjunktion von endlich vielen (algebraischen oder transzendenten) Elementen erzeugt werden können[17]). Dann können wir M zu einem brauchbaren topologischen Raum machen, indem wir zu jedem $\mathfrak{P}$ aus M ein System von Umgebungen durch die folgende Festsetzung definieren:

Ist $\mathfrak{U}$ *ein in* $\mathfrak{K}$ *enthaltener endlicher Erweiterungskörper von* $\mathfrak{K}_g$ *und ist* $\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}$, *so soll unter der Umgebung* $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$ *die Gesamtheit derjenigen* $\mathfrak{P}$ *aus* M *verstanden werden, die der Durchschnittsgleichung* $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{U}$ *genügen.*

Bei dieser Festsetzung des Umgebungsbegriffs sind die üblichen Umgebungsaxiome[18]) erfüllt, nämlich

a) $\mathfrak{P}_0$ ist in jeder Umgebung $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$ enthalten — Umgebungsaxiom *A*.

b) Sind $\Phi_{\mathfrak{U}_1}(\mathfrak{P}_0)$ und $\Phi_{\mathfrak{U}_2}(\mathfrak{P}_0)$ Umgebungen von $\mathfrak{P}_0$, so ist gleichzeitig mit $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ auch der Vereinigungskörper $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ endlicher Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}_g$, und es ist ersichtlich der Durchschnitt der Umgebungen $\Phi_{\mathfrak{U}_1}(\mathfrak{P}_0)$ und $\Phi_{\mathfrak{U}_2}(\mathfrak{P}_0)$ gleich $\Phi_{\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2}(\mathfrak{P}_0)$, also wieder gleich einer Umgebung von $\mathfrak{P}_0$. — Umgebungsaxiom *B*.

c) Bedeutet $\mathfrak{P}_1$ irgendeinen Punkt der Umgebung $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$, so ist $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_1) = \Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$, d. h. zu jedem in einer Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ vorkommenden Punkt $\mathfrak{P}_1$ gibt es eine ganz in dieser Umgebung liegende Umgebung von $\mathfrak{P}_1$, jede Umgebung ist eine offene Punktmenge. — Umgebungsaxiom *C*.

d) Sind $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ verschiedene Punkte aus M, so gibt es ein Element α, das in $\mathfrak{P}_0$, aber nicht in $\mathfrak{P}_1$ auftritt. Wir verstehen unter α_0 bzw. α_1 eine beliebige Nichteinheit aus $\mathfrak{P}_0$ bzw. $\mathfrak{P}_1$ und setzen $\mathfrak{U} = \mathfrak{K}_g(\alpha, \alpha_0, \alpha_1)$. Dann liefert $\mathfrak{U}$ eine Umgebung $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$ von $\mathfrak{P}_0$, die den Punkt $\mathfrak{P}_1$ nicht enthält. — Trennungsaxiom.

Mit Hilfe der Umgebungen können wir jetzt in üblicher Weise den Begriff des Häufungspunktes (Hp.), sowie der abgeschlossenen Punktmenge einführen. Um die Stetigkeitseigenschaften der Zahlfunktionen auf M festzulegen, bedienen wir uns am bequemsten der in der Lebesgueschen Maß-

[17]) Wäre $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_g$ endlich, so würden die folgenden Betrachtungen trivial.

[18]) In der Formulierung und Bezeichnung der Umgebungsaxiome schließe ich mich an die zweite Auflage der Hausdorffschen Mengenlehre an. Über die Tatsache, daß im folgenden z. T. mehr bewiesen wird, als die Gültigkeit der Hausdorffschen Umgebungsaxiome, vgl. K. I, Anm. [7]).

theorie üblichen Abkürzungen $\Lambda(f(\mathfrak{P}) \geqq r)$ [19]) usw. Wir können dann insbesondere definieren: Die Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$, die in $\mathfrak{P}_0$ den endlichen Wert r annimmt, heißt dort *nach oben (nach unten) halbstetig*, wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) \geqq r + \varepsilon)$ $(\Lambda(f(\mathfrak{P}) \leqq r - \varepsilon))$ den Punkt $\mathfrak{P}_0$ nicht als Hp. besitzt. Ist dagegen $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$, so soll $f(\mathfrak{P})$ dann und nur dann in $\mathfrak{P}_0$ nach oben halbstetig heißen, wenn $\mathfrak{P}_0$ kein Hp. der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) \neq -\infty)$ ist.

Um die eingeführten topologischen Begriffe für die Idealtheorie von $\mathfrak{O}$ nutzbar zu machen, brauchen wir noch eine Voraussetzung über die B-Belegung von M, mit deren Hilfe die Zahlfunktionen der Ideale definiert werden. Eine B-Belegung von M soll *im Punkte* $\mathfrak{P}_0$ *normiert* heißen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Sind $\mathfrak{P}_1$ *und* $\mathfrak{P}_2$ *zwei Punkte einer Umgebung* $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$ *und bedeuten* B_1 *und* B_2 *die zu* $\mathfrak{P}_1$ *und* $\mathfrak{P}_2$ *vermöge der gegebenen B-Belegung gehörigen Bewertungen, so erzeugen* B_1 *und* B_2 *stets dieselbe Bewertung* $B_{\mathfrak{U}}$ *von* $\mathfrak{U}$.

Aus Satz 16 schließt man, daß eine in $\mathfrak{P}_0$ normierte B-Belegung auch durch die folgende Eigenschaft charakterisiert werden kann: Liegt $\mathfrak{P}_1$ in irgendeiner Umgebung $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$, so gibt es mindestens eine $\mathfrak{P}_1$ enthaltende, von $\mathfrak{P}_1$ abhängige Umgebung $\Phi_{\mathfrak{U}^*}(\mathfrak{P}_0)$ derart, daß die $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_0$ zugeordneten Bewertungen B_1 und B_0 dieselbe Bewertung $B_{\mathfrak{U}^*}$ von $\mathfrak{U}^*$ erzeugen.

Eine B-Belegung mit der zuletzt angegebenen Eigenschaft kann man aber (im allgemeinen Fall mit Hilfe des Wohlordnungssatzes) leicht konstruieren. Es gibt also stets B-Belegungen von M, die in $\mathfrak{P}_0$ normiert sind.

Satz 17. *Es sei* $\varphi(\mathfrak{P})$ *die Symbolfunktion von* $\mathfrak{a}$, $f(\mathfrak{P})$ *bedeute die Zahlfunktion von* $\mathfrak{a}$ *hinsichtlich einer in* $\mathfrak{P}_0$ *normierten B-Belegung von* M. *Dann ist* $f(\mathfrak{P})$ *in* $\mathfrak{P}_0$ *nach oben halbstetig; ist ferner* $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$, *so besitzen auch die Mengen* $\Lambda(f(\mathfrak{P}) > f(\mathfrak{P}_0))$ *und* $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = f(\mathfrak{P}_0), \varphi(\mathfrak{P}) = u)$ *den Punkt* $\mathfrak{P}_0$ *nicht als Hp.*

Es sei etwa $f(\mathfrak{P}_0) = r$ endlich. Dann gibt es in jedem Fall zu beliebigem $\varepsilon > 0$ in $\mathfrak{a}$ ein Element α, das in der $\mathfrak{P}_0$ zugeordneten Bewertung B_0 einen Wert $w < r + \varepsilon$ hat. Verstehen wir nun unter β eine beliebige Nichteinheit aus $\mathfrak{P}_0$, unter $\mathfrak{U}$ den Körper $\mathfrak{K}_g(\alpha, \beta)$, so definiert $\mathfrak{U}$ eine Umgebung $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$ und es kann für keinen $\mathfrak{P}_1$ aus $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$ die Unglei-

[19]) $\Lambda(f(\mathfrak{P}) \geqq r)$ bedeutet die Menge derjenigen Punkte von M, in denen die auf M definierte Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$ mindestens den Wert r besitzt. In entsprechender Weise soll unter $\Lambda(f(\mathfrak{P}) \geqq r, \varphi(\mathfrak{P}) = e)$ die Menge derjenigen Punkte von M verstanden werden, in denen *gleichzeitig* $f(\mathfrak{P})$ mindestens gleich r und $\varphi(\mathfrak{P})$ gleich e ist usw.

chung $f(\mathfrak{P}_1) \geqq r + \varepsilon$ gelten, da ja das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Element α wegen der Normierung der B-Belegung in der zu $\mathfrak{P}_1$ gehörigen Bewertung B_1 denselben Wert $w < r + \varepsilon$ wie in B_0 besitzen muß. Damit wäre der erste Teil von Satz 17 für endliches $f(\mathfrak{P}_0)$ bewiesen. Ganz entsprechende Überlegungen zeigen die Richtigkeit des ersten Teils für $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$, sowie die des zweiten Teils. Beim Beweise des letzteren hat man nur zu beachten, daß für $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$ das Ideal $\mathfrak{a}$ ein Element vom Werte $f(\mathfrak{P}_0)$ in B_0 enthalten muß.

Besonders wichtig ist die Anwendung von Satz 17 auf die Theorie der umkehrbaren Ideale. Ein Ideal $\mathfrak{u}$ soll *umkehrbar*[20]) heißen, wenn zu $\mathfrak{u}$ ein „reziprokes Ideal" $\mathfrak{u}^{-1}$ existiert, das der Gleichung $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}^{-1} = \mathfrak{o}$ genügt. Die umkehrbaren Ideale bilden ersichtlich eine *Gruppe* mit dem Einheitsideal $\mathfrak{o}$ als Einheitselement; es ist daher das zu $\mathfrak{u}$ reziproke Ideal $\mathfrak{u}^{-1}$ durch $\mathfrak{u}$ eindeutig bestimmt. — Da $\mathfrak{o}$ ein überall endliches Ideal ist, und da seine Zahlfunktion (bei jeder B-Belegung) in allen Punkten von M den Wert 0 besitzt, folgt sofort aus Satz 17 und aus Satz 13 von § 4:

Ist $\mathfrak{u}$ ein umkehrbares Ideal, so sind $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}^{-1}$ überall endlich, und es ist $-f(\mathfrak{P})$ die Zahlfunktion von $\mathfrak{u}^{-1}$, falls $f(\mathfrak{P})$ diejenige von $\mathfrak{u}$ bedeutet. Wenden wir nun Satz 17 auf ein umkehrbares Ideal $\mathfrak{u}$ an, so ergibt sich:

Satz 18. *Ist $f(\mathfrak{P})$ die Zahlfunktion eines umkehrbaren Ideals, hinsichtlich einer in $\mathfrak{P}_0$ normierten B-Belegung, so ist $\mathfrak{P}_0$ weder Hp. der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) > f(\mathfrak{P}_0))$ noch der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) < f(\mathfrak{P}_0))$, d. h. es ist $\mathfrak{P}_0$ kein Hp. von $\Lambda(f(\mathfrak{P}) \neq f(\mathfrak{P}_0))$.*

§ 6.

Anwendung auf die Theorie der unendlichen algebraischen Zahlkörper.

In Zukunft bedeutet $\mathfrak{K}$ einen algebraischen Zahlkörper, $\mathfrak{O}^*$ die Ordnung aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{K}$. Ist insbesondere $\mathfrak{K}$ unendlich über dem Körper $\mathfrak{K}_r$ der rationalen Zahlen, so wählen wir $\mathfrak{K}_r$ als Grundkörper $\mathfrak{K}_g$ im Sinne von § 5 und verstehen dementsprechend unter $\mathfrak{U}$ einen beliebigen (über $\mathfrak{K}_r$) endlichen Unterkörper von $\mathfrak{K}$. Die Ordnung aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{U}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}_u^*$.

Wir behandeln das Problem der Bestimmung aller Ideale aus sämtlichen Hauptordnungen von $\mathfrak{K}$, und zwar insbesondere für den bisher in

[20]) Nach der Dedekindschen Terminologie in den Supplementen zur IV. Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie wären die umkehrbaren Ideale als „eigentliche Moduln" (der Ordnung $\mathfrak{O}$) zu bezeichnen.

der Literatur noch nicht erledigten Fall eines unendlichen $\mathfrak{k}$ [21]). Dabei soll keine voraussetzungslose Theorie entwickelt werden; die für unsre Zwecke nötigen bekannten Sätze aus der Zahlkörperlehre benützen wir ohne uns um die Art ihrer Ableitung weiter zu kümmern. Dagegen sollen diejenigen Eigenschaften der algebraischen Zahlkörper genau charakterisiert werden, die uns gestatten, gerade bei ihnen das gestellte Problem vollkommen zu lösen. Es handelt sich im wesentlichen um drei Punkte:

Erstens lassen sich bei einem algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{k}$ die sämtlichen Maximalordnungen leicht übersehen. Zweitens gibt es im Raume M der Maximalordnungen von $\mathfrak{k}$ eine naheliegende B-Belegung, die im Falle eines unendlichen $\mathfrak{k}$ den Vorteil hat, in jedem Punkte von M normiert zu sein. Drittens ermöglicht bei endlichem $\mathfrak{k}$ die Gültigkeit des Teilerkettensatzes in $\mathfrak{O}^*$ einen unmittelbaren Überblick über alle Hauptordnungen von $\mathfrak{k}$ und ihre sämtlichen Ideale.

Was den ersten Punkt angeht, so gelten gleichmäßig für endliche und unendliche Zahlkörper die folgenden Sätze, die teils explizit in der Literatur vorkommen, teils leicht aus bekannten Tatsachen abgeleitet werden können:

Satz 19[22]). a) *In $\mathfrak{O}^*$ sind neben dem Einheitsideal die maximalen Ideale die einzigen ganzen Ideale, die Primidealeigenschaft besitzen, d. h. gleichzeitig mit dem Produkt zweier Elemente stets auch mindestens einen Faktor enthalten.*

b) *Die Maximalordnungen $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{k}$ entsprechen eindeutig umkehrbar den Maximalidealen (d. h. nach* a) *den ganzen von $\mathfrak{O}^*$ selbst verschiedenen Primidealen) von $\mathfrak{O}^*$. Das $\mathfrak{P}$ zugeordnete Maximalideal $\mathfrak{p}$ von*

[21]) Eine erschöpfende Theorie der *Hauptideale* von $\mathfrak{O}^*$ für einen beliebigen unendlichen Zahlkörper $\mathfrak{k}$ ist in der Einleitung von N. angekündigt, doch ist eine Darstellung dieser Theorie anscheinend noch nicht erschienen.

[22]) Zu Satz a) und Satz c) vgl. K. II, § 1. Betrachtet man ausschließlich ganze Ideale von $\mathfrak{O}^*$, so kann man der Behauptung a) auch die folgende, geläufigere Fassung geben: In $\mathfrak{O}^*$ besitzt kein Primideal einen echten Teiler $\neq \mathfrak{O}^*$. — Verhältnismäßig am schwierigsten ist Behauptung b) zu beweisen. Versteht man unter $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Maximalideal aus $\mathfrak{O}^*$, unter $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ den Ring aller der Körperelemente, die sich als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{O}^*$ mit durch $\mathfrak{p}$ unteilbarem Nenner darstellen lassen, so ist zu zeigen: *Jede Maximalordnung enthält einen $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ und jeder $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ ist Maximalordnung.* Der erste Teil der Behauptung folgt leicht aus dem Umstand, daß jede Maximalordnung wegen ihrer ganzen Abgeschlossenheit sicher $\mathfrak{O}^*$ enthält. Der zweite Teil ergibt sich aus der Tatsache, daß, wie in K. II, § 2 gezeigt, die Struktur der Ideale von $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ gerade so ist, wie es nach § 3 unserer Arbeit bei einer Maximalordnung der Fall sein muß. Dabei ist unangenehm und unschön, daß die Ergebnisse von K. II, § 2 mit Hilfe der bekannten Theorie der endlichen Zahlkörper gewonnen wurden, während in der Formulierung von Satz 19 b) die endlichen Zahlkörper in keiner Weise vor den unendlichen ausgezeichnet erscheinen.

$\mathfrak{O}^*$ *stellt den Durchschnitt des Maximalsideals* $\bar{\mathfrak{p}}$ *von* $\mathfrak{P}$ *mit* $\mathfrak{O}^*$ *dar, während* $\mathfrak{P}$ *aus allen und nur den Elementen von* $\mathfrak{K}$ *besteht, die sich als Quotienten von Elementen aus* $\mathfrak{O}^*$ *mit durch* $\mathfrak{p}$ *unteilbarem Nenner schreiben lassen.*

c) *Jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{O}^*$ *ist der Durchschnitt der sämtlichen Ideale* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}$. *Insbesondere stellt* $\mathfrak{O}^*$ *den Durchschnitt aller* $\mathfrak{P}$ *dar.*

In Zukunft bedeutet $\mathfrak{p}$ stets das $\mathfrak{P}$ zugeordnete Maximalideal aus $\mathfrak{O}^*$, während mit $\bar{\mathfrak{p}}$ das Maximalideal aus $\mathfrak{P}$ selbst bezeichnet werden soll. — Aus Satz 19 c) folgt angesichts der Definition der Hauptordnung und des Satze 10 von § 4:

Satz 20. $\mathfrak{O}^*$ *ist Hauptordnung und es ist ein Ideal von* $\mathfrak{O}^*$ *durch seine Symbolfunktion und die (in bezug auf irgendeine vorgegebene B-Belegung von* M *gebildete) Zahlfunktion eindeutig bestimmt.*

Da $\mathfrak{O}^*$ Durchschnitt der sämtlichen Maximalordnungen von $\mathfrak{K}$ ist, stellt eine beliebige Hauptordnung von $\mathfrak{K}$ stets eine Obermenge von $\mathfrak{O}^*$ dar; ist daher $\mathfrak{a}$ Ideal in bezug auf eine beliebige Hauptordnung, so ist $\mathfrak{a}$ auch Ideal in bezug auf $\mathfrak{O}^*$, d. h. um sämtliche Ideale in sämtlichen Hauptordnungen von $\mathfrak{K}$ zu übersehen, braucht man nur alle Ideale von $\mathfrak{O}^*$ zu kennen.

Die oben unter „zweitens" erwähnte B-Belegung des Raumes M der Maximalordnungen von $\mathfrak{K}$ findet man folgendermaßen: Jedes Maximalideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{O}^*$ enthält eine und nur eine rationale positive Primzahl p, die angesichts von Satz 19 b) in dem $\mathfrak{p}$ zugeordneten $\mathfrak{P}$ Nichteinheit ist, während alle andern rationalen positiven Primzahlen in $\mathfrak{P}$ Einheiten darstellen. Wir nennen p „die zu $\mathfrak{P}$ gehörige Primzahl", $\mathfrak{P}$ „eine zu p gehörige Maximalordnung" und ordnen $\mathfrak{P}$ ein für allemal diejenige zugehörige Bewertung zu, bei der gerade p *den Wert* 1 erhält. Alle andern Bewertungen schließen wir von der Betrachtung aus, so daß der Ausdruck „Wert eines Elements (oder Ideals) *in* $\mathfrak{P}$" einen eindeutigen Sinn bekommt.

Satz 21. *Die eingeführte B-Belegung von* M *ist im Falle eines unendlichen* $\mathfrak{K}$ *in allen Punkten normiert.*

In der Tat, liegen $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ in einer gemeinsamen Umgebung $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0) = \Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_1)$, so ist $\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{U}$, also auch $\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{K}_r = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{K}_r$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ zur gleichen Primzahl p gehören, und aus der Tatsache, daß durch unsere Festsetzung p gleichzeitig in $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ den Wert 1 erhält, ergibt sich nach den in § 5 über normierte B-Belegungen gemachten Bemerkungen sofort die Richtigkeit der Behauptung.

Nach den bisherigen mehr vorbereitenden Betrachtungen nähern wir uns dem Hauptpunkt, indem wir unserm Programm gemäß zunächst für den Fall eines endlichen $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ die sämtlichen Ideale von $\mathfrak{O}^*$ bestimmen.

Zur Herleitung der nötigen Resultate brauchen wir dabei außer den in Satz 19 niedergelegten Ergebnissen im wesentlichen nur die Tatsache, daß in $\mathfrak{O}^*$ (d. h. im Bereich der ganzen Ideale von $\mathfrak{O}^*$) der Teilerkettensatz gilt. Es ist das ein Punkt, der, trotz seiner Nebensächlichkeit für unser Hauptproblem, hervorgehoben zu werden verdient, da er auf die Möglichkeit einer ganz neuen Begründung der algebraischen Zahlentheorie hinweist, bei der das Studium der allgemeinsten algebraischen Zahlkörper an der Spitze steht und der Spezialfall der endlichen Zahlkörper erst an verhältnismäßig später Stelle untersucht wird[23]).

Als *erste Folgerung* aus der Gültigheit des Teilerkettensatzes für $\mathfrak{O}^*$ ergibt sich angesichts von Satz 19 b) die Gültigkeit des Teilerkettensatzes für jeden $\mathfrak{P}$ und daraus schließt man mit Hilfe der Ergebnisse von § 3 leicht weiter:

Die Werte der Elemente von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{P}$ sind rationale Zahlen, deren Nenner bei gekürzter Darstellung einen Teiler von r darstellt, falls das durch die zu $\mathfrak{P}$ gehörige Primzahl p in $\mathfrak{P}$ erzeugte Hauptideal gleich der r-ten Potenz des Maximalideals $\bar{\mathfrak{p}}$ ist. Das Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{O}^*$ besitzt in $\mathfrak{P}$ dann und nur dann das Symbol u, falls es in $\mathfrak{P}$ den Wert $-\infty$ hat.

Als *zweite und dritte Folgerung* aus Satz 19 und dem Teilerkettensatz für $\mathfrak{O}^*$ kann man mit elementaren Schlüssen, die hier nicht weiter ausgeführt zu werden brauchen, ohne jeden besonderen Kunstgriff die folgenden beiden Tatsachen beweisen:

Jedes Element von $\mathfrak{K} - \mathfrak{E}$ besitzt nur in endlich viel Punkten $\mathfrak{P}$ positiven Wert.

Sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_s$ endlich viel Punkte von M und gibt es für $i = 1, 2, \ldots, s$ in $\mathfrak{K}$ ein Element vom Werte r_i in $\mathfrak{P}_i$, so existiert in $\mathfrak{K}$ auch ein Element, das gleichzeitig in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_s$ die Werte $r_1, r_2, \ldots, r_s$ und außerdem in allen andern Punkten von M nichtnegative Werte besitzt[24]).

[23]) Man hätte bei der mir vorschwebenden Ableitung der Hauptsätze der Zahlentheorie einfach der Anordnung der Textes zu folgen, nur daß der Inhalt von Satz 19 ohne Bevorzugung der endlichen Zahlkörper gleich ganz allgemein abzuleiten wäre. Bisher unüberwundene Schwierigkeiten liegen auf diesem Weg nur beim Beweis von Satz 19 b) (vgl. Anm. [22])!). Man hätte, um hier gleich allgemein zum Ziele zu kommen, etwa den folgenden von mir für richtig gehaltenen, an und für sich interessanten Satz zu beweisen: *Eine Ordnung $\mathfrak{O}$ des beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$ ist dann (und selbstverständlich nur dann) Maximalordnung, wenn* 1. *$\mathfrak{O}$ ganz abgeschlossen ist und* 2. *unter den ganzen Idealen von $\mathfrak{O}$, außer $\mathfrak{O}$ selbst, nur ein einziges Primideal vorkommt.*

[24]) Man braucht die zweite und die dritte Folgerung zunächst nur für den Spezialfall zu beweisen, daß es sich um Elemente aus $\mathfrak{O}^*$ handelt bzw. daß die Zahlen r_i sämtlich positiv sind. Die Richtigkeit der allgemeinen Fassung der beiden Folgerungen ergibt sich dann unmittelbar. In den genannten Spezialfällen kann man aber

(Fortsetzung der Fußnote [24]) auf nächster Seite.)

Die gewonnenen Ergebnisse genügen bereits zum Beweise des für uns wesentlichen

Satz 22. *Zu gegebenen Funktionen* $f(\mathfrak{P})$ *und* $\varphi(\mathfrak{P})$ *gibt es dann und nur dann ein Ideal* $\mathfrak{a}$, *das gerade* $f(\mathfrak{P})$ *als Zahl- und* $\varphi(\mathfrak{P})$ *als Symbolfunktion besitzt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

Triviale Bedingungen. *Besitzt* $f(\mathfrak{P})$ *in* $\mathfrak{P}_0$ *den Wert* r, *so gibt es in* $\mathfrak{R}$ *ein Element vom Wert* r *in* $\mathfrak{P}_0$. $\varphi(\mathfrak{P}_0)$ *ist dann und nur dann gleich* u, *wenn* $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$.

Beschränktheitsbedingung. $f(\mathfrak{P})$ *besitzt nur in endlich viel Punkten positiven Wert.*

Die Notwendigkeit der trivialen Bedingungen ist wirklich trivial, die der Beschränktheitsbedingung ergibt sich aus der zweiten Folgerung aus dem Teilerkettensatz. Mit Hilfe der dritten Folgerung schließlich erkennt man mühelos: Genügen die Funktionen $f(\mathfrak{P})$ und $\varphi(\mathfrak{P})$ den Bedingungen von Satz 22 und bedeutet $\mathfrak{a}$ die Gesamtheit der Körperelemente, deren Wert in jedem $\mathfrak{P}_0$ von M mindestens gleich $f(\mathfrak{P}_0)$ ist, so enthält $\mathfrak{a}$ für beliebiges $\mathfrak{P}_0$ Elemente vom Werte $f(\mathfrak{P}_0)$ in $\mathfrak{P}_0$, falls $f(\mathfrak{P}_0) \neq -\infty$ und Elemente von beliebig kleinem Wert in $\mathfrak{P}_0$, falls $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$. Daraus folgt aber mit Hilfe von Satz 14 von § 4 sofort, daß das Ideal $\mathfrak{a}$ gerade $f(\mathfrak{P})$ als Zahl- und $\varphi(\mathfrak{P})$ als Symbolfunktion besitzt.

Nachdem Satz 22 voll bewiesen ist, verlassen wir den Fall $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ und nehmen für den Schluß des Paragraphen $\mathfrak{K}$ als unendlichen algebraischen Zahlkörper an. Wir fragen wieder, unter welchen Bedingungen zwei gegebene Funktionen $f(\mathfrak{P})$ und $\varphi(\mathfrak{P})$ Zahl- und Symbolfunktion eines Ideals $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{O}^*$ darstellen. Was zunächst die „trivialen Bedingungen" angeht, so sind dieselben angesichts der Tatsache, daß nunmehr auch für $f(\mathfrak{P}_0) \neq -\infty$ evtl. $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$ sein kann, und daß nicht mehr notwendig in jedem $\mathfrak{P}$ der Teilerkettensatz gilt, diesmal folgendermaßen zu formulieren:

Triviale Bedingungen. $\varphi(\mathfrak{P}_0)$ *ist höchstens dann gleich* e, *wenn in* $\mathfrak{K}$ *Elemente vom Werte* $f(\mathfrak{P}_0)$ *existieren.* $\varphi(\mathfrak{P}_0)$ *ist sicher gleich* e, *wenn in* $\mathfrak{P}_0$ *der Teilerkettensatz gilt, und* $f(\mathfrak{P}_0)$ *von* $-\infty$ *verschieden ist.*

Was die nötigen Beschränktheitsbedingungen angeht, so kann jetzt durchaus $f(\mathfrak{P})$ in unendlich viel Punkten von M positiv sein. Wohl aber gilt noch:

den Behauptungen die folgende wohlbekannte Fassung geben: Ein Element von $\mathfrak{O}^*$ ist nur durch endlich viele Primideale teilbar. Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ endlich viel Primideale, $r_1, r_2, \ldots, r_s$ nichtnegative ganze Zahlen, so gibt es in $\mathfrak{O}^*$ Elemente, die genau durch $\mathfrak{p}_1^{r_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s^{r_s}$ teilbar sind.

Beschränktheitsbedingungen. *Die Punkte der Mengen* $\Lambda(f(\mathfrak{P}) > 0)$ *und* $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = 0, \varphi(\mathfrak{P}) = u)$ *gehören zu endlich viel verschiedenen Primzahlen.* $f(\mathfrak{P})$ *ist auf* M *nach oben beschränkt.*

Es sei $\alpha \neq 0$ ein Element aus dem Ideale $\mathfrak{a}$, zu dem $f(\mathfrak{P})$ und $\varphi(\mathfrak{P})$ gehören, $\mathfrak{U}$ sei ein α enthaltender endlicher Unterkörper von $\mathfrak{R}$. Im Raume M_u der Maximalordnungen von $\mathfrak{U}$ gibt es nur endlich viel Punkte $\mathfrak{P}_u^{(1)}, \mathfrak{P}_u^{(2)}, \ldots, \mathfrak{P}_u^{(s)}$, in denen α positiven Wert besitzt; $p_1, p_1, \ldots, p_s$ seien die endlich vielen (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen, zu denen $\mathfrak{P}_u^{(1)}, \mathfrak{P}_u^{(2)}, \ldots, \mathfrak{P}_u^{(s)}$ gehören. Beachtet man nun, daß der Wert von $\mathfrak{a}$ in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}_0$ von M niemals größer sein kann als der Wert von α im Punkte $\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{U}$ von M_u und höchstens dann gleich diesem letzteren Wert, falls $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$, so erkennt man unmittelbar: Die Primzahlen, zu denen Punkte der Mengen $\Lambda(f(\mathfrak{P}) > 0)$ und $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = 0, \varphi(\mathfrak{P}) = u)$ gehören, kommen sämtlich in der Reihe $p_1, p_2, \ldots, p_s$ vor; außerdem muß auf M überall $f(\mathfrak{P}) \leqq m$ sein, falls m das Maximum der Werte von α in den Punkten $\mathfrak{P}_u^{(1)}, \mathfrak{P}_u^{(2)}, \ldots, \mathfrak{P}_u^{(s)}$ bedeutet. Die Beschränktheitsbedingungen sind damit bewiesen. Beachten wir noch die Ergebnisse von § 5 sowie Satz 21, so erhalten wir schließlich die für unendliche Körper allein charakteristischen

Stetigkeitsbedingungen. $f(\mathfrak{P})$ *ist überall auf* M *nach oben halbstetig; ist ferner* $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$, *so ist* $f(\mathfrak{P}_0)$ *auch kein Hp. der Mengen* $\Lambda(f(\mathfrak{P}) > f(\mathfrak{P}_0))$ *und* $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = f(\mathfrak{P}_0), \varphi(\mathfrak{P}) = u)$.

Wir wenden uns jetzt zum Beweise des fundamentalen

Satz 23. *Zu gegebenen* $f(\mathfrak{P})$ *und* $\varphi(\mathfrak{P})$ *gibt es dann und nur dann ein Ideal* $\mathfrak{a}$, *das gerade* $f(\mathfrak{P})$ *als Zahl- und* $\varphi(\mathfrak{P})$ *als Symbolfunktion besitzt, wenn* $f(\mathfrak{P})$ *und* $\varphi(\mathfrak{P})$ *den trivialen, den Beschränktheits- und den Stetigkeitsbedingungen genügen.*

Nach den bereits angestellten Betrachtungen bleibt nur noch der positive Teil der Behauptung zu beweisen. Wir nehmen an, daß $f(\mathfrak{P})$ und $\varphi(\mathfrak{P})$ den Bedingungen von Satz 23 genügen und verstehen, analog wie beim Beweise von Satz 22, unter $\mathfrak{a}$ die Menge derjenigen Körperelemente, die in jedem Punkt $\mathfrak{P}_0$ von M einen Wert haben, der mindestens gleich $f(\mathfrak{P}_0)$ ist und sicher größer als $f(\mathfrak{P}_0)$, falls $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$. Um zu beweisen, daß $f(\mathfrak{P})$ die Zahl- und $\varphi(\mathfrak{P})$ die Symbolfunktion von $\mathfrak{a}$ darstellt, haben wir zu zeigen:

a) Ist $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$, so enthält $\mathfrak{a}$ Elemente vom Werte $f(\mathfrak{P}_0)$ in $\mathfrak{P}_0$. b) Ist $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$, $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$, so enthält $\mathfrak{a}$ Elemente von beliebig kleinem Wert in $\mathfrak{P}_0$. c) Ist $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$, $f(\mathfrak{P}_0) = r \neq -\infty$, so enthält $\mathfrak{a}$ für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ Elemente, deren Wert w in $\mathfrak{P}_0$ der Ungleichung $r + \varepsilon > w > r$ genügt. Wir führen nur den Beweis von a) ausführlich aus.

Wegen der Gültigkeit der trivialen und der Stetigkeitsbedingungen gibt es im Falle a) einen $\mathfrak{U}$, der einerseits Elemente vom Werte $f(\mathfrak{P}_0)$ in $\mathfrak{P}_0$ enthält, und der andererseits die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt $\mathfrak{P}_1$ von $\Phi_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{P}_0)$ die Ungleichung $f(\mathfrak{P}_1) \leqq f(\mathfrak{P}_0)$ gilt, und daß sogar $f(\mathfrak{P}_1) < f(\mathfrak{P}_0)$, falls $\varphi(\mathfrak{P}_1) = u$. Es seien jetzt $p_1, p_2, \ldots, p_s$ die wegen der Beschränktheitsbedingungen nur in endlicher Anzahl vorhandenen Primzahlen, die zu Punkten der Mengen $\Lambda(f(\mathfrak{P}) > 0)$ und $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = 0, \varphi(\mathfrak{P}) = u)$ gehören, $\mathfrak{P}_u^{(1)}, \mathfrak{P}_u^{(2)}, \ldots$ seien die von $\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{U}$ verschiedenen, zu Primzahlen der Reihe $p_1, p_2, \ldots, p_s$ gehörigen Maximalordnungen von $\mathfrak{U}$, von denen es wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{U}$ nach der zweiten Folgerung aus dem Teilerkettensatz gleichfalls nur eine endliche Anzahl, etwa t, gibt; schließlich möge m eine ganzzahlige obere Schranke von $f(\mathfrak{P})$ bedeuten. Dann existiert nach der dritten Folgerung aus dem Teilerkettensatz in $\mathfrak{U}$ ein Element α, das in $\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{U}$ den Wert $f(\mathfrak{P}_0)$, in $\mathfrak{P}_u^{(1)}, \mathfrak{P}_u^{(2)}, \ldots, \mathfrak{P}_u^{(t)}$ den Wert $m+1$, in allen andern Punkten von M_u jedenfalls nichtnegativen Wert besitzt. Aus der Tatsache, daß der Wert von α in einem beliebigen $\mathfrak{P}$ von M stets gleich dem Werte von α in $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{U}$ ist, aus der Definition von $\mathfrak{a}$ und aus der Wahl von $\mathfrak{U}$ ergibt sich sofort die Zugehörigkeit von α zu $\mathfrak{a}$ und damit die Richtigkeit der Behauptung a). Beim Beweise von b) und c) verfährt man in ganz analoger Weise. Im Falle c) hat man nur zu beachten, daß wegen der trivialen Bedingungen hier in $\mathfrak{K}$ und damit auch in einem geeignet gewählten $\mathfrak{U}$ Elemente existieren, deren Wert w in $\mathfrak{P}_0$ der Ungleichung $f(\mathfrak{P}_0) + \varepsilon > w > f(\mathfrak{P}_0)$ für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ genügt.

Satz 23 ermöglicht uns in Verbindung mit Satz 20 einen erschöpfenden Überblick über die Ideale von $\mathfrak{O}^*$, sofern wir nur die folgenden beiden Fragen allgemein beantworten können: Gilt in einem beliebig vorgegebenen $\mathfrak{P}_0$ von M der Teilerkettensatz oder nicht? Gibt es zu beliebig vorgegebenem $\mathfrak{P}_0$ und w in $\mathfrak{K}$ ein Element vom Werte w in $\mathfrak{P}_0$? Ohne genauere Kenntnis des Baues des vorgelegten Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ können wir jedenfalls feststellen:

Satz 24. *Soll es in $\mathfrak{K}$ ein Element α vom Werte w in $\mathfrak{P}_0$ geben, so muß w jedenfalls rational sein.*

In der Tat, es sei $\mathfrak{U}$ ein α enthaltender endlicher Unterkörper von $\mathfrak{K}$. Dann ist der Wert w von α in $\mathfrak{P}_0$ gleich dem Wert von α in der Maximalordnung $\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{U}$ von $\mathfrak{U}$ und damit nach den Schlüssen, die wir aus der ersten Folgerung aus dem Teilerkettensatz gezogen haben, rational. — Es sei ferner $\mathfrak{K}$ der Körper aller ganzen algebraischen Zahlen. Dann gilt nach bekannten Sätzen[25]) in keinem $\mathfrak{P}_0$ der Teilerkettensatz und es existieren für

[25]) Nämlich nach denjenigen Sätzen, die zu einem beliebigen Primideal $\mathfrak{p}$ eines beliebigen endlichen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{E}$ die Existenz eines endlichen Erweiterungskörpers $\overline{\mathfrak{E}}$ von $\mathfrak{E}$ gewährleisten, in dem $\mathfrak{p}$ in beliebig vorgegebener Weise zerfällt.

beliebig vorgegebenes rationales w in $\mathfrak{R}$ stets Elemente vom Werte w in $\mathfrak{P}_0$. Für den Körper aller algebraischen Zahlen kann man daher die Formulierung der trivialen Bedingungen folgendermaßen vereinfachen:

$\varphi(\mathfrak{P}_0)$ ist sicher gleich u, wenn $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$ ist.

Wir wenden uns jetzt zu Anwendungen von Satz 20 und 23. Zunächst erhalten wir auf Grund von Satz 13:

Satz 25. *Das überall endliche Ideal* $\mathfrak{b}$ *mit der Zahlfunktion* $g(\mathfrak{P})$ *ist dann und nur dann Faktor des überall endlichen Ideals* $\mathfrak{a}$ *mit der Zahlfunktion* $f(\mathfrak{P})$, *wenn die Funktion* $f(\mathfrak{P}) - g(\mathfrak{P})$ *den Beschränktheits- und Stetigkeitsbedingungen genügt. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das überall endliche Ideal* $\mathfrak{c}$ *mit der Zahlfunktion* $f(\mathfrak{P}) - g(\mathfrak{P})$ *das einzige Ideal, das der Gleichung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ *genügt.*

Man beachte, daß in $\mathfrak{R}$ stets Elemente vom Werte $f(\mathfrak{P}_0) - g(\mathfrak{P}_0)$ in $\mathfrak{P}_0$ existieren, falls es in $\mathfrak{R}$ Elemente von den Werten $f(\mathfrak{P}_0)$ und $g(\mathfrak{P}_0)$ in $\mathfrak{P}_0$ gibt. — Auf die an und für sich leicht mögliche Formulierung eines zu Satz 25 anologen Theorems für Ideale mit beliebiger Symbolfunktion verzichten wir aus den bei Satz 13 angegebenen Gründen. Dagegen sollen noch die sämtlichen Ordnungen von $\mathfrak{R}$ bestimmt werden, die Obermengen und damit Ideale von $\mathfrak{O}^*$ sind. Zunächst gilt:

Das Ideal $\mathfrak{a}$ *mit der Zahlfunktion* $f(\mathfrak{P})$ *und der Symbolfunktion* $\varphi(\mathfrak{P})$ *ist dann und nur dann Ordnung, wenn für beliebiges* $\mathfrak{P}_0$ *von* M *stets entweder* $f(\mathfrak{P}_0) = 0$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$ *oder* $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$ *ist.*

In der Tat, ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{O}$ Ordnung, so ist wegen des Vorkommens von 1 in $\mathfrak{O}$ die Funktion $f(\mathfrak{P})$ nirgends positiv, und es ist sicher $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$, falls $f(\mathfrak{P}_0) = 0$. Ist ferner $f(\mathfrak{P}_0) < 0$, so enthält $\mathfrak{O}$ ein Element α von negativem Wert in $\mathfrak{P}_0$ und es kommen dann (z. B. in Gestalt der Potenzen von α) in $\mathfrak{O}$ Elemente von beliebig kleinem Wert in $\mathfrak{P}_0$ vor, d. h. es muß $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$ sein. — Es sei jetzt umgekehrt für die Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$ und die Symbolfunktion $\varphi(\mathfrak{P})$ von $\mathfrak{a}$ in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}_0$ von M stets entweder $f(\mathfrak{P}_0) = 0$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$ oder $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$. Dann besteht $\mathfrak{a}$ aus der Gesamtheit der Körperelemente, die in den Punkten der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = 0, \varphi(\mathfrak{P}) = e)$ nichtnegativen Wert besitzen, d. h. es ist $\mathfrak{a}$ Durchschnitt der Maximalordnungen der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = 0, \varphi(\mathfrak{P}) = e)$ und damit Ordnung, ja sogar Hauptordnung.

Es bleibt nur noch zu untersuchen, wann ein Funktionenpaar, das nur der beiden Wertkombinationen $f(\mathfrak{P}_0) = 0$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = e$ und $f(\mathfrak{P}_0) = -\infty$, $\varphi(\mathfrak{P}_0) = u$ fähig ist, Zahl- und Symbolfunktion eines Ideals $\mathfrak{a}$ darstellt. Für ein solches Funktionenpaar sind offenbar die trivialen und die Beschränktheitsbedingungen immer erfüllt, die Stetigkeitsbedingungen dagegen dann und nur dann, wenn kein Punkt der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = -\infty, \varphi(\mathfrak{P}) = u)$

Hp. der Menge $\Lambda\,(f(\mathfrak{P}) = 0,\ \varphi(\mathfrak{P}) = e)$, d. h. wenn $\Lambda\,(f(\mathfrak{P}) = 0,\ \varphi(\mathfrak{P}) = e)$ abgeschlossen ist. Zusammenfassend können wir feststellen:

Satz 26. *Die Ordnungen $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$, die Obermengen und damit Ideale von $\mathfrak{O}^*$ sind, entsprechen eindeutig umkehrbar den abgeschlossenen Untermengen Λ von M. Die zu $\mathfrak{O}$ gehörige Menge Λ besteht aus allen und nur den Maximalordnungen von $\mathfrak{K}$, die $\mathfrak{O}$ als Untermenge enthalten; $\mathfrak{O}$ seinerseits stellt den Durchschnitt der Maximalordnungen von Λ dar und ist somit Hauptordnung.*

Durch Satz 26 sind — da ja jede Hauptordnung von $\mathfrak{K}$ Obermenge von $\mathfrak{O}^*$ ist — die sämtlichen Hauptordnungen von $\mathfrak{K}$ bestimmt. Es sei jetzt $\mathfrak{O}$ eine beliebige Hauptordnung, Λ die zugehörige abgeschlossene Untermenge von M, N die Menge aller der nicht in Λ vorkommenden Punkte von M. Dann gilt offenbar der Satz:

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{O}^*$ mit der Zahlfunktivn $f(\mathfrak{P})$ und der Symbolfunktion $\varphi(\mathfrak{P})$, so ist $\mathfrak{a}$ dann und nur dann auch Ideal von $\mathfrak{O}$, wenn überall auf N die Gleichungen $f(\mathfrak{P}) = -\infty$, $\varphi(\mathfrak{P}) = u$ gelten.

Wir übersehen also auf Grund unserer Ergebnisse die sämtlichen Ideale in sämtlichen Hauptordnungen von $\mathfrak{K}$; das Problem, das wir uns gestellt hatten, ist vollkommen gelöst.

§ 7.

Umkehrbare Ideale in algebraischen Zahlkörpern.

Bei den Untersuchungen von § 6 wurde nirgends von der Abzählbarkeit eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers Gebrauch gemacht, so daß die wichtigsten Ergebnisse ohne weiteres auf die Theorie von ganz beliebigen Körpern algebraischer Funktionen einer Variablen übertragen werden können[26]). Anders im folgenden, wo wir wieder einen unendlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ untersuchen, aber die Tatsache benutzen, daß zu $\mathfrak{K}$ (unend-

[26]) Natürlich ergeben sich bei der Behandlung eines Körpers $\mathfrak{K}_x$ von algebraischen Funktionen einer Variablen x gewisse Abweichungen von § 6. Die wesentlichste ist wohl die, daß in $\mathfrak{K}_x$ nicht sämtliche Maximalordnungen eine feste Hauptordnung enthalten (Auftreten der „unendlich fernen Stellen") und daß aus diesem Grunde bei $\mathfrak{K}_x$ nicht ohne weiteres sämtliche Hauptordnungen bestimmt werden können. Dagegen kann eine beliebige feste Hauptordnung $\mathfrak{O}_x^*$ von $\mathfrak{K}_x$ genau nach demselben Schema untersucht werden, wie in § 6 die Hauptordnung $\mathfrak{O}^*$ eines Zahlkörpers $\mathfrak{K}$. Insbesondere gilt der volle Inhalt von Satz 19 in jedem Fall für $\mathfrak{O}_x^*$ bzw. für die $\mathfrak{O}_x^*$ enthaltenden Maximalordnungen von $\mathfrak{K}_x$. (Die Sätze von K. II, § 2, auf die sich Satz 19b stützt, werden in K. II unter Benutzung der Tatsache bewiesen, daß jeder algebraische Zahlkörper aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion von abzählbar unendlich viel Elementen erzeugt werden kann. Indes ist, wie leicht zu sehen, dieser Umstand für die Beweise durchaus überflüssig.)

lich viele) mit $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{R}$, beginnende *Körperfolgen* $\{\mathfrak{U}_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ existieren, bei denen jeweils $\mathfrak{U}_i$ eine (selbstverständlich endliche) Erweiterung von $\mathfrak{U}_{i-1}$, $\mathfrak{R}$ den Vereinigungskörper aller $\mathfrak{U}_i$ darstellt[27]). Wir legen unseren Betrachtungen eine feste Körperfolge $\{\mathfrak{U}_i\}$ zugrunde und bezeichnen mit $\mathfrak{P}_{ir}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ die Maximalordnungen von $\mathfrak{U}_i$, die in abzählbar unendlicher Anzahl vorhanden sind, weil es abzählbar unendlich viele rationale positive Primzahlen gibt und weil zu jeder Primzahl nur endlich viele Maximalordnungen von $\mathfrak{U}_i$ gehören. Mit Φ_{ir} $(r = 0, 1, \ldots)$ bezeichnen wir die durch $\mathfrak{P}_{ir}$ im Raume M der Maximalordnungen von $\mathfrak{R}$ definierte Umgebung, also die Gesamtheit der Maximalordnungen von $\mathfrak{R}$, die mit $\mathfrak{U}_i$ gerade $\mathfrak{P}_{ir}$ als Durchschnitt besitzen. Das abzählbar unendliche System der Φ_{ir} $(i, r = 0, 1, \ldots)$ bildet ein *volles Umgebungssystem* im Hausdorffschen Sinne, der Raum M genügt also dem *zweiten Abzählbarkeitsaxiom*. In Zukunft dürfen und wollen wir nur mit den Umgebungen Φ_{ir} arbeiten, während alle andern Umgebungen von der Betrachtung ausgeschlossen werden sollen. Unter einer *Umgebungsfolge* $\{\Phi_{ir_i}\}$ verstehen wir eine Folge $\Phi_{0r_0}, \Phi_{1r_1}, \Phi_{2r_2}, \ldots$, bei der Φ_{ir_i} stets in $\Phi_{i-1, r_{i-1}}$ enthalten ist. Dann gilt:

Hilfssatz. *Die Punkte von* M *entsprechen eindeutig umkehrbar den sämtlichen möglichen Umgebungsfolgen.*

In der Tat, ist $\mathfrak{P}$ ein Punkt aus M, so gibt es für jedes i eine und nur eine $\mathfrak{P}$ enthaltende Umgebung Φ_{ir_i} und die Gesamtheit der Φ_{ir_i} liefert offenbar eine Umgebungsfolge $\{\Phi_{ir_i}\}$. Ist ferner eine Umgebungsfolge $\{\Phi_{ir_i}\}$ vorgelegt, so bildet die Vereinigungsmenge der zu den Φ_{ir_i} gehörigen $\mathfrak{P}_{ir_i}$ eine Maximalordnung $\mathfrak{P}$ aus M, die ihrerseits wieder die Umgebungsfolge $\{\Phi_{ir_i}\}$ in dem beim Beweise des ersten Teiles des Hilfssatzes präzisierten Sinne erzeugt. — Auf Grund des Hilfssatzes beweisen wir:

Satz 27. *Eine unendliche Untermenge* Λ *von* M, *deren Punkte zu endlich viel verschiedenen Primzahlen gehören, besitzt stets einen Hp.*[28]).

Die Voraussetzung, daß die Punkte von Λ zu endlich vielen Primzahlen gehören, besagt nichts anderes, als daß sie sich auf endlich viel Umgebungen Φ_{0r} und damit für jedes feste i auch auf endlich viel Umgebungen Φ_{ir} verteilen. Auf Grund dieser Tatsache beweisen wir Satz 27 mit Schlüssen, die noch mehrmals an entscheidender Stelle Verwendung finden werden.

Da Λ nach Voraussetzung unendlich viel Elemente enthält, muß es mindestens eine Umgebung Φ_{0r_0} geben, in der unendlich viele Punkte von Λ

[27]) Vgl. zu den folgenden Untersuchungen die ganz analogen Betrachtungen von K. I, § 3.

[28]) Vgl. K. I, § 3, Satz 6.

liegen. Wir verstehen unter Φ_{0r_0} eine feste derartige Umgebung, unter Λ_1 den Durchschnitt von Λ und Φ_{0r_0}. Da die unendlich vielen Punkte von Λ_1 sich auf endlich viel Umgebungen Φ_{1r} verteilen, können wir eine feste (in Φ_{0r_0} enthaltene!) Umgebung Φ_{1r_1} angeben, derart, daß der Durchschnitt Λ_2 von Λ_1 und Φ_{1r_1} aus unendlich viel Elementen besteht. Λ_2 liefert uns wieder eine in Φ_{1r_1} enthaltene Umgebung Φ_{2r_2}, die unendlich viel Punkte von Λ_2 enthält, usw. Man sieht, man gelangt zu einer Umgebungsfolge $\{\Phi_{ir_i}\}$, deren Individuen sämtlich unendlich viel Punkte von Λ enthalten, und damit nach dem Hilfssatz zu einem Hp. von Λ.

Von besonderer Bedeutung ist Satz 27 für die Theorie der umkehrbaren Ideale. Es sei $\mathfrak{u}$ ein umkehrbares Ideal mit der Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$. Dann können wir zunächst feststellen:

Die Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = \alpha)$ ist für beliebiges α stets gleichzeitig offen und abgeschlossen.

In der Tat, Satz 18 von § 5, der sich auf die sämtlichen Punkte von M anwenden läßt, zeigt, daß die Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = \alpha)$ gleichzeitig mit einem Punkte $\mathfrak{P}_0$ stets auch eine ganze Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ enthält, und daß umgekehrt $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = \alpha)$ keinen Hp. $\mathfrak{P}_0$ besitzen kann, in dem nicht ebenfalls $f(\mathfrak{P}) = \alpha$ wäre. — Da bei einem umkehrbaren Ideal $\mathfrak{u}$ nicht nur die Funktion $f(\mathfrak{P})$, sondern auch die Funktion $-f(\mathfrak{P})$ als Zahlfunktion von $\mathfrak{u}^{-1}$ den Beschränktheitsbedingungen von § 6 genügen muß, erhalten wir weiter:

Ist $f(\mathfrak{P})$ Zahlfunktion eines umkehrbaren Ideals, so gehören nicht nur die Punkte der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) > 0)$, sondern auch die Punkte der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) < 0)$, d. h. die sämtlichen Punkte der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) \neq 0)$ zu endlich viel verschiedenen Primzahlen.

Wir benutzen die gemachten Bemerkungen zum Beweise des folgenden Hauptsatzes über umkehrbare Ideale:

Satz 28. *Ein Ideal von $\mathfrak{O}^*$ ist dann und nur dann umkehrbar, wenn es eine endliche Basis besitzt.*

Es sei zunächst $\mathfrak{e}$ ein Ideal von $\mathfrak{O}^*$ mit der endlichen Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\mathfrak{U}$ sei ein sämtliche α_i enthaltender endlicher Unterkörper von $\mathfrak{K}$. Dann ist $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ auch eine endliche Basis des Ideals $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{U}$ von $\mathfrak{O}_u^*$ und es gilt die Gleichung $\mathfrak{e} = (\mathfrak{e} \cap \mathfrak{U}) \cdot \mathfrak{O}^*$. Daraus folgt aber angesichts der bekannten (auch aus Satz 22 von § 6 leicht abzuleitenden) Tatsache, daß in $\mathfrak{U}$ jedes Ideal von $\mathfrak{O}_u^*$ mit endlicher Basis umkehrbar ist, sofort die Umkehrbarkeit von $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{K}$. — Der erste Teil der Behauptung von Satz 28 ist also fast trivial. Wesentlich schwieriger ist der Beweis, daß jedes umkehrbare Ideal von $\mathfrak{O}^*$ eine endliche Basis besitzt, ein Beweis, den wir nunmehr in vier Etappen führen:

a) Ist $\mathfrak{u}$ ein umkehrbares Ideal mit der Zahlfunktion $f(\mathfrak{P})$, so besitzen fast alle[29]) Umgebungen Φ_{ir} die Eigenschaft, daß $f(\mathfrak{P})$ in sämtlichen Punkten von Φ_{ir} denselben Wert annimmt.

Wir nehmen an, die Behauptung sei für $\mathfrak{u}$ falsch. Dann können wir, da die Punkte, in denen $f(\mathfrak{P})$ von 0 verschieden ist, zu endlich vielen Primzahlen gehören, nach den Methoden des Beweises von Satz 22 die Existenz einer Umgebungsfolge $\{\Phi_{ir_i}\}$ erschließen, bei der die Funktion $f(\mathfrak{P})$ in keiner der Umgebungen Φ_{ir_i} konstant ist. Bezeichnet nun $\mathfrak{P}_0$ den durch die Folge $\{\Phi_{ir_i}\}$ nach dem Hilfssatz definierten Punkt von M, so ist $\mathfrak{P}_0$ sicher kein innerer Punkt der Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = f(\mathfrak{P}_0))$, d. h. die Menge $\Lambda(f(\mathfrak{P}) = f(\mathfrak{P}_0))$ kann nicht offen sein. Damit sind wir zu einem Widerspruch gegen ein bereits gewonnenes Ergebnis gelangt, die Richtigkeit der Behauptung a) ist durch indirekten Schluß bewiesen.

b) Es sei jetzt $\Phi_{i^*r^*}$ eine Umgebung, auf der $f(\mathfrak{P})$ konstant ist, t sei der Wert, den $f(\mathfrak{P})$ in den Punkten von $\Phi_{i^*r^*}$ annimmt. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathfrak{P}$ von $\Phi_{i^*r^*}$ ein Element vom Werte t in $\mathfrak{P}$ und wir behaupten:

Diejenigen Umgebungen Φ_{ir} $(i = i^*, i^* + 1, \ldots)$, die Untermengen von $\Phi_{i^*r^*}$ sind, haben fast alle die Eigenschaft, daß *bereits in* $\mathfrak{U}_i$ ein Element α existiert, das in einem und damit in allen Punkten von Φ_{ir} den Wert t besitzt.

Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch, so muß es, wie aus den beim Beweise des Satzes 27 und der Behauptung a) benützten Schlüssen zu ersehen, eine Umgebungsfolge $\{\Phi_{ir_i}\}$ geben, unter deren Gliedern $\Phi_{i^*r^*}$ vorkommt, und die außerdem die Eigenschaft besitzt, daß es in keinem $\mathfrak{U}_i$ ein Element α gibt, das in den Punkten von Φ_{ir_i} gerade den Wert t hat. Dann kann aber in $\mathfrak{R}$ überhaupt kein Element existieren, das in dem durch die Folge $\{\Phi_{ir_i}\}$ nach dem Hilfssatz definierten Punkt $\mathfrak{P}_0$ von M den Wert t besitzt, und das steht mit der Tatsache in Widerspruch, daß $\mathfrak{P}_0$ zur Umgebung $\Phi_{i^*r^*}$ gehört. — Nachdem die Richtigkeit von Behauptung b) durch indirekten Schluß gesichert ist, beweisen wir weiter:

c) Wählen wir i^* hinreichend groß, so ist $f(\mathfrak{P})$ auf jeder einzelnen der Umgebungen Φ_{i^*r} $(r = 0, 1, \ldots)$ konstant, und es gibt in $\mathfrak{U}_{i^*}$ Elemente, die in den Punkten von Φ_{i^*r} den Wert t_r besitzen, falls $f(\mathfrak{P})$ auf Φ_{i^*r} gerade gleich t_r ist.

Zunächst ist nach a) die Funktion $f(\mathfrak{P})$ für hinreichend großes i_0 auf jeder einzelnen Umgebung Φ_{i_0r} $(r = 0, 1, \ldots)$ konstant. Bedeutet ferner t_r den Wert von $f(\mathfrak{P})$ auf Φ_{i_0r}, so können wir nach b) zu jedem r eine

[29]) D. h. alle mit endlich viel Ausnahmen.

ganze positive Zahl $i_{0r} \geqq i_0$ so bestimmen, daß zu jedem $\mathfrak{P}$ von $\Phi_{i_0 r}$ in $\mathfrak{U}_{i_{0r}}$ ein Element vom Werte t_r in $\mathfrak{P}$ existiert. Wählen wir dabei die Zahlen i_{0r} möglichst klein, so sind höchstens endlich viele von ihnen (nämlich höchstens diejenigen für die $t_r \neq 0$) von i_0 verschieden; verstehen wir dann unter i^* das größte i_{0r}, so ist ersichtlich für i^* die Behauptung c) erfüllt.

d) Es sei i^* so groß gewählt, daß wir von c) Gebrauch machen können, t_r sei wie bei c) der konstante Wert von $f(\mathfrak{P})$ auf $\Phi_{i^* r}$. Definieren wir dann im Raume M_{i^*} der Maximalordnungen von $\mathfrak{U}_{i^*}$ eine Zahlfunktion durch die Gleichungen $f(\mathfrak{P}_{i^* r}) = t_r$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, so gibt es, wie angesichts von c) aus Satz 22 zu ersehen, ein überall endliches Ideal $\mathfrak{u}_{i^*}$ von $\mathfrak{O}_{i^*}^*$, das gerade $f(\mathfrak{P}_{i^* r})$ zur Zahlfunktion hat. $\mathfrak{u}_{i^*}$ besitzt eine endliche Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, weil $\mathfrak{U}_{i^*}$ endlich und $f(\mathfrak{P}_{i^* r})$ nur in endlich viel Punkten von M_{i^*} von 0 verschieden ist. Bilden wir nun das Ideal $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}_{i^*} \cdot \mathfrak{O}^*$ von $\mathfrak{O}^*$, so ist $\mathfrak{u}'$ ein überall endliches Ideal von $\mathfrak{O}^*$ mit der gleichen Zahlfunktion wie $\mathfrak{u}$, es gilt daher nach Satz 20 die Gleichung $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}$, das beliebig vorgegebene umkehrbare Ideal $\mathfrak{u}$ besitzt in $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ eine endliche Basis.

Die grundlegende Bedeutung, die der nunmehr voll bewiesene Satz 28 vor allem für den Körper aller algebraischen Zahlen besitzt, wurde bereits in der Einleitung hervorgehoben.

(Eingegangen am 21. Januar 1929.)

Ein Hauptsatz über umkehrbare Ideale.

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

In § 7 der unmittelbar vorangehendeu Arbeit „Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II" habe ich mit topologischen Methoden den folgenden Satz bewiesen:

In der Hauptordnung eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers besitzt jedes umkehrbare Ideal eine endliche Basis.

Inzwischen habe ich mich überzeugt, daß der genannte Satz unter viel allgemeineren Voraussetzungen ganz elementar, unmittelbar aus der Definition des Ideals und der Umkehrbarkeit abgeleitet werden kann.

Es sei $\mathfrak{O}$ ein ganz beliebiger, kommutativer oder nicht kommutativer Ring mit Haupteinheit ε, $\mathfrak{R}$ sei irgendein Oberring von $\mathfrak{O}$ (insbesondere kann $\mathfrak{R}$ gleich dem zu $\mathfrak{O}$ gehörigen Quotientenkörper gewählt werden, falls $\mathfrak{O}$ einen (kommutativen) Integritätsbereich darstellt). Unter einem *Ideal* verstehen wir einen der Gleichung $\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{m}$ genügenden Modul aus $\mathfrak{R}$, die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mögen eine *Basis* von $\mathfrak{m}$ genannt werden. wenn $\mathfrak{m}$ das mengentheoretisch kleinste Ideal ist, das die sämtlichen Elemente α_i enthält; schließlich soll ein Ideal $\mathfrak{u}$ dann und nur dann *umkehrbar* heißen, wenn zu $\mathfrak{u}$ ein der Gleichung $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}^{-1} = \mathfrak{O}$ genügendes „reziprokes" Ideal $\mathfrak{u}^{-1}$ existiert. Dann gilt der folgende

Satz. *Jedes umkehrbare Ideal besitzt eine endliche Basis.*

In der Tat, die umkehrbaren Ideale bilden jedenfalls hinsichtlich der Multiplikation eine Gruppe, in der Gleichung $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}^{-1} = \mathfrak{O}$ ist also der Faktor $\mathfrak{u}$ durch $\mathfrak{u}^{-1}$ und $\mathfrak{O}$ eindeutig bestimmt. Nach der Definition der Idealmultiplikation kann man ferner endlich viel Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ aus $\mathfrak{u}$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ aus $\mathfrak{u}^{-1}$ so wählen, daß die Gleichung $\varepsilon = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \beta_n$ gilt. Versteht man nun unter $\mathfrak{u}'$ das Ideal mit der endlichen Basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so wird $\mathfrak{u}' \cdot \mathfrak{u}^{-1} = \mathfrak{O}$, $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}$.

(Eingegangen am 20. November 1929.)

Ein Satz über relativ-Galoissche Zahlkörper und seine Anwendung auf relativ-Abelsche Zahlkörper.

Von

Helmut Hasse in Halle.

Es sei ein algebraischer Zahlkörper k als Grundkörper vorgegeben. Ist K ein beliebiger algebraischer Zahlkörper über k, so bezeichne ich mit $P(K)$ die Menge fast aller[1]) derjenigen nicht in der Diskriminante von $K|k$ aufgehenden Primideale aus k, die in K mindestens einen Primteiler vom Relativgrade 1 haben. Insbesondere für einen über k Galoisschen Zahlkörper G sind alle Primteiler in G der Primideale aus $P(G)$ vom Relativgrade 1.[2])

1. Zur Anknüpfung für das Folgende stelle ich einige bekannte Tatsachen voran.

Ist $G|k$ Galoissch vom Grade g, so existiert nach Kronecker[3]) die Dirichlet-Dichte von $P(G)$:

$$\lim_{s \to 1} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \text{ in } P(G)} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}{\log \frac{1}{s-1}} = \frac{1}{g}.$$

Wie Herr Bauer[4]) gezeigt hat, ergibt sich daraus leicht, daß G durch $P(G)$ eindeutig bestimmt ist, und darüber hinaus der Satz:

Sind $G|k$ und $G'|k$ Galoissch, so bedingen sich die Relationen

$$G \leqq G' \quad \text{und} \quad P(G) \geqq P(G')$$

gegenseitig.

[1]) Im Sinne: „bis auf endlich viele, beliebig wählbare Ausnahmen".

[2]) Daß diese Eigenschaft sogar charakteristisch für relativ-Galoissche Zahlkörper ist, worauf mich Herr H. Grell aufmerksam machte, folgt leicht aus dem zweiten der nachher angeführten Bauerschen Sätze.

[3]) L. Kronecker, Über die Irreduktibilität von Gleichungen, Berliner Monatsberichte 1880.

[4]) M. Bauer, Über einen Satz von Kronecker, Arch. d. Math. u. Phys. (III) 6 (1904); Über zusammengesetzte Körper, ebenda.

Man hat dazu nur das Kompositum GG' zu betrachten und zu beachten, daß $P(GG')$ der Durchschnitt $P(G) \cap P(G')$ ist.

Allgemeiner hat Herr Bauer[5]) den folgenden Satz bewiesen:

Ist $G|k$ Galoissch und $K'|k$ beliebig, so bedingen sich die Relationen

$$G \leqq K' \quad \text{und} \quad P(G) \geqq P(K')$$

gegenseitig.

Ich gebe nachstehend eine weitere Verallgemeinerung, und zwar in der Richtung, daß ich die „Größe" (in einem unten näher zu präzisierenden Sinne) des Durchschnitts $G \cap K'$ zu dem Zerlegungsverhalten der Primideale von k in G und K' in Beziehung setze.

2. Dazu stütze ich mich, wie schon Herr Bauer zum Beweis des genannten Satzes, auf die von Frobenius[6]) gegebene Zuordnung der nicht in der Diskriminante von $G|k$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ aus k zu den Klassen konjugierter Substitutionen σ der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von $G|k$: Auf Grund der Relation

$$\mathsf{A}^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma \mathsf{A} \bmod \mathfrak{P} \text{ für jedes ganze } \mathsf{A} \text{ aus } G$$

ist jedem Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in G eine Substitution σ aus $\mathfrak{G}$ zugeordnet; dabei sind bezüglich k konjugierten $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ konjugierte σ zugeordnet, also $\mathfrak{p}$ eine Klasse konjugierter σ.

Ich nenne im folgenden die Gesamtheit fast aller der Klasse einer Substitution σ in dieser Weise zugeordneten Primideale $\mathfrak{p}$ aus k eine Klasse nach G in k und sage kurz, $\mathfrak{p}$ gehöre nach G zur Klasse von σ.

Da σ Erzeugende der Zerlegungsgruppe zu $\mathfrak{P}$ für $G|k$ ist, ist die Ordnung von σ gleich dem Relativgrad von $\mathfrak{P}$ bezüglich k. Insbesondere ist also die Hauptklasse, d. h. die zur identischen Substitution $\sigma = 1$ gehörige Klasse nach G in k die oben definierte Menge $P(G)$.

Unter der Dichte einer Menge von Klassen nach G verstehe ich die Dirichlet-Dichte der durch sie gebildeten Primidealmenge.

Wie Herr Tschebotareff[7]) gezeigt hat, existieren diese Dichten und

[5]) M. Bauer, Zur Theorie der algebraischen Zahlkörper, Math. Annalen **77** (1916).

[6]) G. Frobenius, Über die Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Berl. Ber. 1896. — Siehe auch die aus dem Nachlaß von A. Hurwitz unter gleichem Titel veröffentlichte Arbeit nebst den anschließenden Bemerkungen von Herrn F. Gaßmann, Math. Zeitschr. **25** (1926).

[7]) N. Tschebotareff, Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Annalen **95** (1925). Vgl. auch O. Schreier, Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff, Abh. a. d. Math. Sem. Hamb. **5** (1927). — Siehe ferner E. Artin, 1. Über eine neue Art von L-Reihen, ebenda **3** (1924), 2. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, ebenda **5** (1927). – Es sei bemerkt, daß schon das weniger weitgehende, von Frobenius loc. cit. (siehe auch Hurwitz-Gaßmann loc. cit.) gefundene Resultat, daß die sog. Abteilungsdichten existieren, für den Zweck dieser Arbeit ausreicht.

sind gleich den relativen Häufigkeiten der zugehörigen Substitutionen in der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$.

3. Die angekündigte Verallgemeinerung des obigen Bauerschen Satzes lautet nun:

Satz 1. *Es sei G/k Galoissch und K'/k beliebig. Es bezeichne $\mathfrak{H}$ diejenige Untergruppe der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von G/k, zu der der Durchschnitt $G \cap K'$ als Teilkörper von G gehört.*

Die Dichte derjenigen Klassen nach G in k, deren Durchschnitt mit $P(K')$ nicht leer ist, ist gleich der relativen Häufigkeit der Substitutionen der mit $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen in $\mathfrak{G}$.

Diese relative Häufigkeit ist um so kleiner, je „kleiner" $\mathfrak{H}$ ist, je „größer" also $G \cap K'$ ist. Ihr Reziprokes kann somit als Maß für die „Größe" dieses Durchschnitts angesehen werden. Ist speziell K'/k Galoissch, oder G/k Abelsch, so ist $\mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, und die fragliche relative Häufigkeit ist $\frac{h}{g}$, wo g die Ordnung von $\mathfrak{G}$ und h die Ordnung von $\mathfrak{H}$ bezeichnet. Das „Größenmaß" $\frac{g}{h} = n$ ist dann der Index von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$, d. h. auch der Grad über k von $G \cap K'$.

Ehe ich zum Beweise von Satz 1 schreite, will ich noch zeigen, wie der obige Bauersche Satz darunter enthalten ist. Einerseits bedeutet $G \leqq K'$, daß $G \cap K' = G$, also $\mathfrak{H} = 1$, und somit die in Satz 1 genannte relative Häufigkeit gleich $\frac{1}{g}$ ist. Andererseits bedeutet $P(G) \geqq P(K')$, daß nur die Hauptklasse $P(G)$ nach G mit $P(K')$ einen nicht leeren Durchschnitt hat, daß also die in Satz 1 genannte Dichte gleich $\frac{1}{g}$ ist. Beides zusammen ergibt den Bauerschen Satz als Folge aus Satz 1.

4. Beweis des Satzes 1. Es sei G' der durch K' bestimmte Galoissche Körper über k, ferner $\mathfrak{G}'$ die Galoissche Gruppe von G'/k und $\mathfrak{H}'$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}'$, zu der K' als Teilkörper von G' gehört. Es gehöre $\mathfrak{p}$ nach G' zur Klasse von σ'. Die zu den Primteilern von $\mathfrak{p}$ gehörigen konjugierten Zerlegungsgruppen für G'/K' entstehen aus denen für G'/k durch Durchschnittsbildung mit $\mathfrak{H}'$. Dann und nur dann also, wenn eine der letzteren in $\mathfrak{H}'$ enthalten ist, d. h. wenn eine der mit σ' konjugierten Substitutionen in $\mathfrak{H}'$ enthalten ist, hat ein Primteiler $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{p}$ in G' bezüglich K' denselben Relativgrad wie bezüglich k, d. h. hat $\mathfrak{p}$ in K' einen Primteiler vom Relativgrade 1. *Hiernach ist $P(K')$ die Menge derjenigen Klassen nach G', die zu Substitutionen aus $\mathfrak{H}'$ gehören*[8]).

[8]) Siehe dazu schon Frobenius loc. cit. S. 701.

Ich betrachte nun das Kompositum GG'. Wird festgesetzt, daß die Substitutionen aus $\mathfrak{G}$ den Körper G' und die Substitutionen aus $\mathfrak{G}'$ den Körper G elementweise ungeändert lassen sollen, so ist die Galoissche Gruppe von $GG'|k$ eine gewisse Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ des direkten Produkts $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ *Es gehöre nun* $\mathfrak{p}$ *nach* G *zur Klasse von* σ *und nach* G' *zur Klasse von* σ'. Das bedeutet das Bestehen von Relationen:

$$\mathsf{A}^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma\mathsf{A} \bmod \mathfrak{P} \quad \text{für jedes ganze } \mathsf{A} \text{ aus } G,$$
$$\mathsf{A}'^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma'\mathsf{A}' \bmod \mathfrak{P}' \quad \text{für jedes ganze } \mathsf{A}' \text{ aus } G',$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ Primteiler von $\mathfrak{p}$ in G und G' bezeichnen. Dabei kann σ unter seinen konjugierten so gewählt werden, daß $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ nicht teilerfremd sind, sondern in GG' einen Primteiler $\mathfrak{P}$ gemeinsam haben. *Dann gehört* $\mathfrak{p}$ *nach* GG' *zur Klasse von* $\sigma\sigma'$. Denn aus der mit unbestimmten σ_0 aus $\mathfrak{G}$ und σ_0' aus $\mathfrak{G}'$ angesetzten Relation

$$\overline{\mathsf{A}}^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma_0\sigma_0'\overline{\mathsf{A}} \bmod \overline{\mathfrak{P}} \quad \text{für jedes ganze } \overline{\mathsf{A}} \text{ aus } GG'$$

folgt durch Anwendung speziell auf die A und A' nach obigem $\sigma_0 = \sigma$ und $\sigma_0' = \sigma'$. Insbesondere ist daher dann $\sigma\sigma'$ in der Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ enthalten. Ohne die vorher getroffene Normierung von σ läßt sich dies Resultat so aussprechen: *Eine geeignete konjugierte zu einer Substitution* σ *aus* $\mathfrak{G}$ *bildet mit einer Substitution* σ' *aus* $\mathfrak{G}'$ *dann und nur dann ein zu* $\overline{\mathfrak{G}}$ *gehöriges Produkt, wenn die Klasse nach* G *von* σ *mit der Klasse nach* G' *von* σ' *einen nicht leeren Durchschnitt hat.* Übrigens ist dieser Durchschnitt dann eine Klasse nach GG'.

Die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von $G|k$ wird, als Faktorgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$, geliefert, indem man die Substitutionen $\sigma\sigma'$ aus $\mathfrak{G}$ auf G allein anwendet, wobei ja der Bestandteil σ' irrelevant ist. Die zu $G \cap K'$ gehörige Untergruppe $\mathfrak{H}$ wird auf diese Weise durch diejenige Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ geliefert, deren Substitutionen $\sigma\sigma'$ den Körper K' elementweise ungeändert lassen, d. h. für die der Bestandteil σ' zu der oben definierten Untergruppe $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{G}'$ gehört. $\mathfrak{H}$ besteht also aus denjenigen Substitutionen σ aus $\mathfrak{G}$, die sich mit Substitutionen σ' aus $\mathfrak{H}'$ zu Substitutionen $\sigma\sigma'$ aus $\mathfrak{G}$ zusammensetzen. Übersetzt man dies auf Grund der zuvor angestellten Überlegungen in eine Aussage über die Primidealklassen, so ergibt sich: *Eine Klasse nach* G *gehört dann und nur dann zu einer Substitution aus* $\mathfrak{H}$, *wenn sie mit einer zu einer Substitution aus* $\mathfrak{H}'$ *gehörigen Klasse nach* G' *einen nicht leeren Durchschnitt hat, d. h. wenn sie mit der Menge* $P(K')$ *einen nicht leeren Durchschnitt hat.* Daraus ergibt sich die Behauptung des Satzes 1 auf Grund des Tschebotareffschen (oder auch nur des Frobeniusschen) Dichtigkeitssatzes.

5. Ich gebe jetzt eine Anwendung von Satz 1 auf die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, indem ich den folgenden Satz beweise:

Satz 2. *Es sei G/k Klassenkörper zu der Idealgruppe H vom Führer $\mathfrak{f}$ in k, und K'/k beliebig.*

GK'/K' ist Klassenkörper zur Gruppe H' derjenigen zu $\mathfrak{f}$ primen Ideale in K', deren Normen nach k in die Gruppe H fallen.

Insbesondere ist also der Führer von GK'/K' ein Teiler des Führers $\mathfrak{f}$ von G/k.

Für den Spezialfall, daß $K' \leqq G$ und also $GK' = G$ ist, ist das eines der Resultate, die ich gemeinsam mit Herrn A. Scholz kürzlich herleitete[9]).

6. Beweis des Satzes 2. Die Gruppe H' enthält zunächst ersichtlich den Strahl $\bmod \mathfrak{f}$ in K'. Ferner fallen die Normen der zu $\mathfrak{f}$ primen Ideale aus GK' nach K' in die Gruppe H'. Denn deren Normen nach k fallen in die Gruppe H, weil sie auch als Normen von GK' über G nach k aufgefaßt werden können. Die Gruppe H' enthält somit die $GK' \bmod \mathfrak{f}$ zugeordnete Idealgruppe in K'. Auf Grund der Takagischen Definition der Klassenkörperbeziehung wird daher der Beweis erbracht sein, wenn gezeigt ist, daß der Index von H' in der Gruppe A' aller zu $\mathfrak{f}$ primen Ideale aus K' (mindestens) gleich dem Grade von GK'/K', oder — was dasselbe — dem Grade von $G/G \cap K'$ ist.

Um das zu zeigen, betrachte ich die Abbildung der Gruppe A' durch Normbildung nach k auf eine Gruppe von Klassen nach H. Dabei entspricht jedenfalls der Gruppe H' und nur ihr die Hauptklasse H. Ist also U die Gruppe derjenigen Klassen nach H, in denen Normen nach k aus A' liegen, so gilt

$$A'/H' \cong U/H.$$

Es genügt daher zu zeigen, daß der Index von H in U (mindestens) gleich dem Grad von $G/G \cap K'$ ist.

Dazu wende ich Satz 1 an. Nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz[10]) fällt die eingangs definierte Klasseneinteilung nach G in k mit der Kongruenzklasseneinteilung nach H zusammen, und die Dichten sind die relativen Häufigkeiten in der Klassengruppe nach H. Da die Klassengruppe nach H und die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von G/k dieselbe Ordnung g haben, können statt der relativen Häufigkeiten auch einfach die ihnen zugrunde liegenden Anzahlen verglichen werden. Die Klassen nach H, die mit $P(K')$

[9]) H. Hasse und A. Scholz, Zur Klassenkörpertheorie auf Takagischer Grundlage, Math. Zeitschr. **29** (1928); siehe den Beweis des dortigen Satzes 2.

[10]) Siehe die S. 560, Anm. [7]) zitierten Arbeiten von Artin, insbesondere die zweite.

einen nicht leeren Durchschnitt haben, sind diejenigen Klassen nach H, die Normen nach k zu $\mathfrak{f}$ primer[11]) Primideale ersten Relativgrades aus K' enthalten. Diese Klassen gehören also sämtlich zu U. Nach Satz 1 ist daher die Anzahl der U zusammensetzenden Klassen nach H, d. h. der Index von H in U[12]), mindestens gleich der Anzahl der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Substitutionen aus $\mathfrak{G}$, d. h. dem Grade von $G/G \cap K'$. Damit ist nach dem schon Gesagten der Beweis des Satzes 2 erbracht.

Halle, 2. April 1929.

[11]) Diese Einschränkung darf gemacht werden, weil bei der Definition von $P(K')$ endlich viele Ausnahmen zugelassen sind.

[12]) Wie man sich leicht überlegt, läßt sich dieser Schluß (und damit der ganze Beweis) auch ohne Anwendung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes, auf Grund des Existenzsatzes und des Zerlegungssatzes der Klassenkörpertheorie, durchführen.

(Eingegangen am 12. April 1929.)

Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage.

Von

Helmut Hasse in Halle.

Inhalt.

Einleitung.
§ 1. Tabellarische Aufnahme des Tatbestandes.
§ 2. Die Invarianten.
§ 3. Die Arithmetik in Abhängigkeit von den Invarianten.
§ 4. Kubische Zahlkörper vorgegebener Diskriminante.

Einleitung.

Von den verschiedensten Seiten sind die kubischen Zahlkörper als einfachstes Beispiel nicht-Galoisscher Zahlkörper herangezogen und mehr oder weniger eingehend untersucht worden [1]). Der Schlüssel zu ihrer Behandlung liegt darin, daß die zugehörigen Galoisschen Körper über ihrem quadratischen Teilkörper Abelsch sind. Nachdem nun die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper durch die Herren Takagi [2]) und Artin [3]) zu einem gewissen Abschluß gebracht ist, verlohnt es sich wohl, auf sie gestützt,

[1]) Unter der zahlreichen Literatur seien hier nur genannt: 1. die in breitester Ausführlichkeit gehaltene, umfangreiche Dissertation von Fräulein L. Sapolski (Göttingen 1902), 2. R. Dedekind, Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern, Journ. f. d. r. u. a. Math. **121** (1900).

[2]) T. Takagi, Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, Journ. Coll. Science **41** (1920). — Siehe auch H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teile I und Ia, Jahresber. d. D. M.-V. **35** (1926) und **36** (1927); im folgenden zitiert mit B. I und B. Ia.

[3]) E. Artin, Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. a. d. Mathem. Seminar Hamburg **5** (1927).

eine dem neuesten Stande der Wissenschaft entsprechende Darstellung der arithmetischen Theorie der kubischen Zahlkörper zu geben. Diese mag dann als Paradigma dienen für den allgemeineren Fall solcher Zahlkörper, deren zugehörige Galoissche Körper über einem zyklischen Teilkörper Abelsch sind.

Ich beschränke die folgenden arithmetischen Untersuchungen auf die Erzeugung der kubischen Zahlkörper durch Abelsche Körper über einem quadratischen Zahlkörper. Was ihre Erzeugung durch Radikalkörper über einem biquadratischen Zahlkörper (Cardanische Formel!) betrifft, so mag deren arithmetische Untersuchung vom Standpunkt der Klassenkörpertheorie einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben.

§ 1.

Tabellarische Aufnahme des Tatbestandes.

Bezeichnungen.

R — der Körper der rationalen Zahlen.

K, K_1, K_2 — drei konjugierte kubische Zahlkörper über R, die als verschieden vorausgesetzt werden [4]).

D — ihre Diskriminante.

$B = K K_1 K_2 = K(\sqrt{D})$ — der zugehörige bikubische Galoissche Körper über R, der über K quadratisch ist.

$\bar{D}$ — seine Diskriminante.

$Q = R(\sqrt{D})$ — der in B enthaltene quadratische Körper über R, über dem B kubisch-zyklisch ist.

d — seine Diskriminante, also auch $Q = R(\sqrt{d})$, und

(1) $$D = d f^2$$

mit rationalem, ganzem [5]) f.

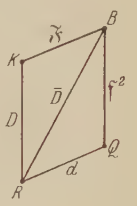
[4]) Wenn im folgenden von einem kubischen Zahlkörper K die Rede ist, so wird stets stillschweigend diese Annahme gemacht. Der Fall eines Galoisschen und somit zyklischen kubischen Zahlkörpers, der gruppentheoretisch einen anderen einfacheren Typus repräsentiert, wird also beiseite gelassen. Siehe über ihn schon H. Weber, Lehrbuch der Algebra 2 (2. Aufl. 1899), § 25.

[5]) Man beachte dazu den bekannten Satz: „$D \equiv 0$ oder $1 \bmod 4$ für jede Zahlkörper-Diskriminante D“, für den Herr I. Schur kürzlich einen neuen, sehr eleganten Beweis gegeben hat: Elementarer Beweis eines Satzes von L. Stickelberger, Math. Zeitschr. 29 (1929).

$\tau = (\sqrt{d} \to -\sqrt{d})$ die nicht-identische Substitution von Q; ihre Anwendung wird auch durch Striche angedeutet: $\tau\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, $\tau\,\alpha = \alpha'$, ...

$\mathfrak{f}^2$ die Diskriminante von B/Q.[6])

$\mathfrak{F}$ die Diskriminante von B/K.



Es ist[7])

(2) $|D| = |d|^3 \cdot N(\mathfrak{f})^2$,

(3) $|\bar{D}| = |D|^2 \cdot N(\mathfrak{F})$.

H die Idealgruppe vom Index 3 in Q, zu der B Klassenkörper ist. („Umkehrsatz" der Klassenkörpertheorie!)

Es ist[8])

$\mathfrak{f}$ ihr Führer.

Die Anwendung der Hilbertschen Theorie der relativ-Galoisschen Zahlkörper[9]) verbunden mit der Takagischen Theorie der relativ-zyklischen Zahlkörper vom Primzahlgrad[10]) führt, wie gleich näher erläutert wird, zu den in der beigefügten Tabelle zusammengestellten Möglichkeiten und Bedingungen für die Zerlegung der Primzahlen aus R in B, Q, K und ihre Beiträge zu $\bar{D}$, $\mathfrak{f}$, d, $\mathfrak{F}$, D.

Erläuterungen zur Tabelle.

Spalte 1. Es bezeichnet:

$\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe von drei Elementen; Ordnung 6.

$\mathfrak{A}$ die in $\mathfrak{S}$ als Normalteiler enthaltene alternierende Gruppe; Ordnung 3.

$\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ die drei verschiedenen konjugierten Untergruppen der Ordnung 2 von $\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{E}$ die Untergruppe der Ordnung 1 von $\mathfrak{S}$.

[6]) Daß sie Idealquadrat in Q ist, siehe in B. Ia, § 9, Satz 3.

[7]) D. Hilbert, „Zahlbericht", Satz 39.

[8]) B. Ia, § 9, Satz 3; § 17, Satz 20; § 18, Satz 20′.

[9]) Siehe etwa B. Ia, § 8. } Einzelverweise auf diese beiden Paragraphen,

[10]) Siehe vor allem B. Ia, § 9. } die in den folgenden „Erläuterungen" an zahlreichen Stellen nötig wären, mögen durch dieses Generalzitat erspart werden.

	Hilbertsche Untergruppenreihe							Primidealzerlegung von p in						Bedingungen für p und seine Primfaktoren $\mathfrak{p}$ in Q			Mögliche Werte von v	Beitrag von p zu							
								B		Q		K						D	$\mathfrak{f}$	$N(\mathfrak{f})$	d	$\mathfrak{F}$	$N(\mathfrak{F})$	D	
	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{G}_Z$	$\mathfrak{G}_T$	$\mathfrak{G}_{V_1}$	...	$\mathfrak{G}_{V_v}$	$\mathfrak{G}_{V_{v+1}}$	Faktoren	Grad	Fakt.	Grad	Fakt.	Grade												
1	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	...	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}_1\,\overline{\mathfrak{P}}_2\,\overline{\mathfrak{P}}_3\,\overline{\mathfrak{P}}_4\,\overline{\mathfrak{P}}_5$	1	$\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$	1	$\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2$	1, 1, 1	—	$\left(\frac{d}{p}\right)=+1$	$\mathfrak{p},\mathfrak{p}'$ in H	—	—	—	—	—	—	—	—	Nicht-Diskriminantenteiler
2	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	...	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}'$	3	$\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$	1	$\mathfrak{P}$	3	—	$\left(\frac{d}{p}\right)=+1$	$\mathfrak{p},\mathfrak{p}'$ nicht in H	—	—	—	—	—	—	—	—	
3	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	...	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{P}_1\,\overline{\mathfrak{P}}_2$	2	$\mathfrak{p}$	2	$\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1$	1, 2	—	$\left(\frac{d}{p}\right)=-1$	$\mathfrak{p}$ in H	—	—	—	—	—	—	—	—	
4	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{E}$	...	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$(\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}')^3$	1	$\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$	1	$\mathfrak{P}^3$	1	$p\ \ +1\,(3)$	$\left(\frac{d}{p}\right)=+1$	—	—	p^4	$\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$	p^2	1	1	1	p^2	Reguläre Diskriminantenteiler
5	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{E}$	...	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\overline{\mathfrak{P}}^3$	2	$\mathfrak{p}$	2	$\mathfrak{P}^3$	1	$p\ \ -1\,(3)$	$\left(\frac{d}{p}\right)=-1$	—	—	p^4	$\mathfrak{p}$	p^2	1	1	1	p^2	
6	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{E}$	...	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$(\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}_1\,\overline{\mathfrak{P}}_2)^2$	1	$\mathfrak{p}^2$	1	$\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1^2$	1, 1	$p\neq 2$	$\left(\frac{d}{p}\right)=0$	$\mathfrak{p}$ in H	—	p^3	1	1	p	$\mathfrak{P}$	p	p	
7	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	...	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{E}$	$(\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}')^3$	1	$\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$	1	$\mathfrak{P}^3$	1	$p=3$	$\left(\frac{d}{3}\right)=+1$	—	1	3^8	$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}')^2$	3^4	1	1	1	3^4	Irreguläre Diskriminantenteiler
8	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	...	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{E}$	$\overline{\mathfrak{P}}^3$	2	$\mathfrak{p}$	2	$\mathfrak{P}^3$	1	$p=3$	$\left(\frac{d}{3}\right)=-1$	—	1	3^8	$\mathfrak{p}^2$	3^4	1	1	1	3^4	
9	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{A}$	...	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{P}^6$	1	$\mathfrak{p}^3$	1	$\mathfrak{P}^3$	1	$p=3$	$\left(\frac{d}{3}\right)=0$	—	1, 3 nur 1, wenn $d\equiv+3\,(9)$	3^{2v+5}	$\mathfrak{p}^{v+1}$	3^{v+1}	3	$\mathfrak{P}$	3	3^{v+2}	
10	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{T}$	...	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{E}$	$(\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}_1\,\overline{\mathfrak{P}}_2)^2$	1	$\mathfrak{p}^2$	1	$\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1^2$	1, 1	$p=2$	$\left(\frac{d}{2}\right)=0$	$\mathfrak{p}$ in H	1, 2	2^{3v+3}	1	1	2^{v+1}	$\mathfrak{P}^{v+1}$	3^{v+1}	2^{v+1}	
	1							2		3		4		5	6	7	8	9		10	11	12		13	

$\mathfrak{S}$ ist die Galoissche Gruppe von B/R. Den Untergruppen:

$$\mathfrak{E};\quad \mathfrak{A};\quad \mathfrak{T}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2;\quad \mathfrak{S}$$

von $\mathfrak{S}$ sind im Sinne des Fundamentalsatzes der Galoisschen Theorie die Teilkörper:

$$B;\quad Q;\quad K, K_1, K_2;\quad R$$

von B zugeordnet.

In Spalte 1 sind nun alle Möglichkeiten aufgeführt, die bei der Betrachtung von B/R für die Hilbertschen Untergruppenreihen der Primideale aus B in Frage kommen. Es sind das alle Unternehmergruppenreihen:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{G} \geqq \mathfrak{G}_Z \geqq \mathfrak{G}_T \geqq \mathfrak{G}_{V_1} \geqq \cdots \geqq \mathfrak{G}_{V_v} \geqq \mathfrak{G}_{V_{v+1}} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{G}_{V_v} > \mathfrak{E} \text{ für } v > 0,$$

die den Bedingungen genügen:

$\mathfrak{G}_T$ und die $\mathfrak{G}_{V_n}$ sind Normalteiler von $\mathfrak{G}_Z$,

$\mathfrak{G}_Z/\mathfrak{G}_T$ und $\mathfrak{G}_T/\mathfrak{G}_{V_1}$ sind zyklisch, die $\mathfrak{G}_{V_n}/\mathfrak{G}_{V_{n+1}}$ sind Abelsch.

In den weiteren Spalten ist dann tabelliert, welche Form die Zerlegung einer Primzahl p aus R in B, Q, K hat, welche einschränkenden Bedingungen für p sich ergeben, und welche Beiträge p zu D, $\mathfrak{f}$, d, $\mathfrak{F}$, D liefert, wenn die Hilbertsche Untergruppenreihe eines Primteilers von p in B die in Spalte 1 aufgeführte ist. Für diesen Zweck braucht in Spalte 1 von verschiedenen zueinander konjugierten Untergruppenreihen immer nur eine als Repräsentant berücksichtigt zu werden. Die ihr entsprechenden Primteiler von p in B, Q, K sind mit $\mathfrak{P}, \mathfrak{p}, \mathfrak{P}$ ohne Index bezeichnet.

Die sich so ergebenden zehn verschiedenen Möglichkeiten für die Hilbertsche Untergruppenreihe sind in drei Gruppen eingeteilt, je nachdem

$$\mathfrak{G}_T = \mathfrak{E} \quad | \quad \mathfrak{G}_T > \mathfrak{E},\ \mathfrak{G}_{V_1} = \mathfrak{E} \quad | \quad \mathfrak{G}_{V_1} > \mathfrak{E}$$

ist, d. h. je nachdem in welche der drei bekannten Kategorien:

Nicht-Diskriminantenteiler	Reguläre Diskriminantenteiler	Irreguläre Diskriminantenteiler

die Primzahl p für B/R gehört.

Spalte 2. Anzahl $\bar{G}$, Grad $\bar{F}$, Ordnung $\bar{E}$ der Primteiler $\mathfrak{P}$ von p in B ergeben sich nach den Regeln:

$$(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_Z) = \bar{G}, \qquad (\mathfrak{G}_Z : \mathfrak{G}_T) = \bar{F}, \qquad (\mathfrak{G}_T : \mathfrak{E}) = \bar{E}.$$

Spalte 3. Anzahl g, Grad f, Ordnung e der Primteiler $\mathfrak{p}$ von p in Q ergeben sich aus Spalte 2 nach den bekannten Regeln:

$$efg = 2; \quad e\bar{e} = \bar{E},\ f\bar{f} = \bar{F},\ g\bar{g} = \bar{G}; \quad \bar{e}\bar{f}\bar{g} = 3$$

auf Grund der Primzahleigenschaft von 2 und 3. Dabei ergeben sich gleichzeitig Anzahl $\bar{g}$, Grad $\bar{f}$, Ordnung $\bar{e}$ für die Relativzerlegung der $\mathfrak{p}$ aus Q in B [11]).

Spalte 4. Anzahl G, Grade F_i, Ordnungen E_i der Primteiler $\mathfrak{P}_i$ [12]) von p in K ergeben sich aus Spalte 2 entsprechend wie oben, hier nach den Regeln:

$$\sum_{i=0}^{G-1} E_i F_i = 3; \quad E_i \bar{E}_i = \bar{E}, \; F_i \bar{F}_i = \bar{F}, \; \sum_{i=0}^{G-1} G_i = \bar{G}; \quad \bar{E}_i \bar{F}_i \bar{G}_i = 2$$

auf Grund der Primzahl- und Größeneigenschaften von 2 und 3. Dabei ergeben sich gleichzeitig die Anzahlen G_i, Grade $\bar{F}_i$, Ordnungen $\bar{E}_i$ für die Relativzerlegung der $\mathfrak{P}_i$ aus K in B [11]).

Spalte 5. Diese Bedingungen folgen aus Spalte 1 nach den Regeln:
Die Ordnungen der $\mathfrak{G}_{V_n}$ sind Potenzen $p^{\bar{R}_n}$ von p.
$(\mathfrak{G}_T : \mathfrak{G}_{V_1}) = \bar{E}^{(0)}$ ist Teiler von $p^{\bar{F}} - 1 = p^{(\mathfrak{G}_Z : \mathfrak{G}_T)} - 1$.
In Zeile 5 folgt hieraus nur: „$p \neq 3$“. Die schärfere Bedingung: „$p \equiv -1 \bmod 3$“ wird erst am Schluß von § 3 herauskommen.

Spalte 6. Diese Bedingungen bringen, gemäß Spalte 3, das bekannte Zerlegungsgesetz für den quadratischen Körper $Q = R(\sqrt{d})$ zum Ausdruck. $\left(\frac{d}{p}\right)$ bedeutet das Kroneckersche Symbol.

Spalte 7. Diese Bedingungen bringen, gemäß den Spalten 2, 3, das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz für die Relativzerlegung in B/Q zum Ausdruck [13]).

Spalte 8. Falls von $\mathfrak{E}$ verschiedene Verzweigungsgruppen $\mathfrak{G}_{V_n} = \mathfrak{A}$ bzw. $= \mathfrak{T}$ für B/R vorhanden sind (Zeilen 7, 8, 9 bzw. Zeile 10), so ist deren Anzahl v auch gleich der Anzahl der von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Verzweigungsgruppen für B/Q bzw. für B/K. Denn durch Durchschnittsbildung mit $\mathfrak{A}$ bzw. mit $\mathfrak{T}$ entsteht aus der Hilbertschen Untergruppenreihe für B/R die für B/Q bzw. die für B/K, weil Q bzw. K der $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{T}$ zugeordnete Teilkörper von B ist. Daher ist die Anzahl v den Bedingungen unterworfen:

---

[11]) Von der Angabe dieser Relativzerlegung in der Tabelle durfte, auf Grund jener Regeln, abgesehen werden.

[12]) $i = 0$ ist als Fehlen eines Index zu lesen (vgl. S. 569).

[13]) Diese Bedingungen fallen in den Zeilen 4, 5, 7, 8, 9, die den Teilern $\mathfrak{p}$ der Diskriminante von B/Q entsprechen, aus, weil das allgemeine Klassenkörper-Zerlegungsgesetz (B. I, § 7, Satz 12) hier für diese $\mathfrak{p}$ trivial ist.

$$\left\{\begin{array}{c} 1 \leqq v \leqq \frac{ep}{p-1} \\ (v,p)=1 \text{ oder } v=\frac{ep}{p-1} \end{array}\right\} \text{ in den Zeilen 7, 8, 9}$$

$$\text{bzw.} \left\{\begin{array}{c} 1 \leqq v \leqq \frac{Ep}{p-1} \\ (v,p)=1 \text{ oder } v=\frac{Ep}{p-1} \end{array}\right\} \text{ in Zeile 10,}$$

wo e die Ordnung von $\mathfrak{p}$ bzw. E die Ordnung von $\mathfrak{P}$ ist. Diese hat nach Spalte 3 bzw. Spalte 4 die Werte:

$$e = 1, 1, 2 \quad \text{bzw.} \quad E = 1,$$

und nach Spalte 5 ist

$$p = 3 \quad \text{bzw.} \quad p = 2.$$

So ergeben sich die angegebenen Möglichkeiten für v, bis auf die Einschränkungen in Zeile 9. Dort resultiert nämlich zunächst nur: „$v = 1, 2, 3$". Daß hier genauer: „$v = 1, 3$" gilt, wird in der Erläuterung zu Spalte 13 gefolgert werden, die weitere Einschränkung: „$v = 1$ für $d \equiv +3 \bmod 9$" erst am Schluß von § 3.

Spalte 9. Der Beitrag von p zu $\bar{D}$ ergibt sich aus den Spalten 1, 2, sowie 5 nach der Regel

$$\bar{D}_p = p^{\bar{G}\bar{F}[(\bar{E}-1)+(p^{\bar{R}_1}-1)+\ldots+(p^{\bar{R}_v}-1)]}.$$

Spalte 10. Der Beitrag von p zu $\mathfrak{f}$ ergibt sich aus den Spalten 2, 3 (Relativzerlegung in B/Q), sowie 5, 8 nach der Regel:

$$\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid 3} \mathfrak{p}^1 \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid 3} \mathfrak{p}^{v+1},$$

wo $\mathfrak{p}$ die in B verzweigten Primteiler aus Q durchläuft. Für die $\mathfrak{p} \mid 3$ (Zeilen 7, 8, 9) ist dabei zu beachten, daß die Anzahl v der Verzweigungsgruppen $\neq \mathfrak{E}$ (also $= \mathfrak{A}$) für B/R hier beim Übergang zu $B_1 Q$ (also Durchschnittsbildung mit $\mathfrak{A}$) dieselbe bleibt.

Der Beitrag von p zu $N(\mathfrak{f})$ kann dann nach der Gradangabe in Spalte 3 berechnet werden.

Spalte 11. Der Beitrag von p zu d ergibt sich aus den Spalten 9, 10 nach der obigen Relation (2)[14]).

[14]) Dieser Beitrag hätte auch zuerst, nach dem bekannten Diskriminantengesetz für den quadratischen Körper Q, gemäß Spalte 3 gebildet und daraus dann nach der Relation (2) mittels Spalte 10 der Beitrag von p zu $\bar{D}$ in Spalte 9 berechnet werden können. Für Zeile 10 hätte man dazu noch zu beweisen gehabt, daß hier v auch die Anzahl der Verzweigungsgruppen $\neq \mathfrak{E}$ für Q/R ist, eine Tatsache, die aus B. Ia, § 8, (8a.) und § 9, Satz 3_2 leicht zu entnehmen ist, die sich aber bei dem im Text eingeschlagenen Wege von selbst ergibt.

Spalte 12. Der Beitrag von p zu $\mathfrak{F}$ ergibt sich aus den Spalten 2, 4 (Relativzerlegung in B/K), sowie 5, 8 nach der Regel:

$$\mathfrak{F} = \prod_{\mathfrak{P} \nmid 2} \mathfrak{P}^1 \cdot \prod_{\mathfrak{P} \mid 2} \mathfrak{P}^{v+1},$$

wo $\mathfrak{P}$ die in B verzweigten Primteiler aus K durchläuft. Für $\mathfrak{P} \mid 2$ (Zeile 10) ist dabei wieder zu beachten, daß die Anzahl v der Verzweigungsgruppen $\neq \mathfrak{E}$ (also $= \mathfrak{T}$) für B/R hier beim Übergang zu B/K (also Durchschnittsbildung mit $\mathfrak{T}$) dieselbe bleibt.

Der Beitrag von p zu $N(\mathfrak{F})$ kann dann nach der Gradangabe in Spalte 4 berechnet werden.

Spalte 13. Der Beitrag von p zu D ergibt sich aus den Spalten 11, 12 nach der obigen Relation (3).

Die bisher noch nicht ausgenutzte obige Relation (1) fordert schließlich, daß die Beiträge von p zu d und D sich um eine Potenz von p mit geradem Exponenten unterscheiden. Die in den Spalten 11 und 13 gefundenen Beiträge befriedigen diese Bedingung identisch, bis auf Zeile 9, wo sich so die schon angekündigte Einschränkung $v \neq 2$ für Spalte 8 ergibt.

§ 2.

Die Invarianten.

Die quadratische Körperdiskriminante d und die Idealgruppe H vom Index 3 im quadratischen Körper $Q = R(\sqrt{d})$ nenne ich die Invarianten des kubischen Zahlkörpers K.

Durch K sind nämlich d und H bestimmt. Umgekehrt ist durch d und H zunächst B als Klassenkörper zu H über Q festgelegt, und damit auch K bis auf die Unterscheidung der drei konjugierten K, K_1, K_2.

Es interessiert nun, unter welchen Bedingungen vorgelegte d, H Invarianten eines kubischen Zahlkörpers K sind. Die Entscheidung darüber beruht auf dem folgenden Hilfssatz aus der allgemeinen Klassenkörpertheorie, dessen Beweis sich mittels des Artinschen Reziprozitätsgesetzes[15]) besonders einfach und durchsichtig gestaltet:

Hilfssatz. *Es sei*

k_0 ein algebraischer Zahlkörper,

k ein über k_0 zyklischer Körper,

τ eine erzeugende Substitution der Galoisschen Gruppe von k/k_0,

A ein über k Abelscher Körper,

H die Idealgruppe in k, zu der A Klassenkörper ist.

---

[15]) Siehe S. 565, Anm. [3]).

a) *Dann und nur dann ist A/k_0 Galoissch, wenn H bei τ invariant ist.*

b) *Dann und nur dann ist A/k_0 sogar Abelsch, wenn sogar die Klassen nach H bei τ invariant sind.*

Beweis. a) Es ist A/k_0 Galoissch dann und nur dann, wenn $\tau A = A$ ist. Nun ist τA Klassenkörper zu τH. Nach dem Eindeutigkeitssatz der Klassenkörpertheorie ist also $\tau A = A$ dann und nur dann, wenn $\tau H = H$ ist.

b) Es sei jetzt A/k_0 Galoissch, H bei τ invariant. Es bezeichne dann:

$\mathfrak{G}_0$ die Galoissche Gruppe von A/k_0,

$\mathfrak{G}$ die Abelsche-Galoissche Gruppe von A/k.

$\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}$ ist zur zyklischen Gruppe $\{\tau\}$ isomorph. Dieser Isomorphismus kann dargestellt werden, indem einer Nebenschar aus $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}$ die durch ihre Substitutionen für die Zahlen aus k bewirkte Substitution zugeordnet wird. Auf diese Weise entspreche τ der Nebenschar $\tau_0\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G} = \{\tau_0\mathfrak{G}\}$. Es ist A/k_0 Abelsch, d. h. $\mathfrak{G}_0$ Abelsch, dann und nur dann, wenn

$$\tau_0\sigma\tau_0^{-1} = \sigma$$

für jede Substitution σ aus $\mathfrak{G}$ ist.

Nach dem Isomorphiesatz der Klassenkörpertheorie ist nun $\mathfrak{G}$ isomorph zur Gruppe der Klassen nach H. Und nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz kann dieser Isomorphismus dargestellt werden, indem einer Klasse C nach H diejenige Substitution σ aus $\mathfrak{G}$ zugeordnet wird, die für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus C die Relation befriedigt:

$$\mathsf{A}^{N(\mathfrak{p})} \equiv \sigma\mathsf{A} \bmod \mathfrak{p} \text{ für jedes ganze } \mathsf{A} \text{ aus } A.$$

Weil aus dieser Relation folgt:

$$(\tau_0\mathsf{A})^{N(\mathfrak{p})} \equiv \tau_0\sigma\tau_0^{-1}(\tau_0\mathsf{A}) \bmod \tau_0\mathfrak{p},$$

so ist der Klasse $\tau_0 C = \tau C$ auf dieselbe Weise die Substitution $\tau_0\sigma\tau_0^{-1}$ zugeordnet. Wegen der Eineindeutigkeit der Zuordnung ist also dann und nur dann $\tau_0\sigma\tau_0^{-1} = \sigma$ für jede Substitution σ aus $\mathfrak{G}$, wenn $\tau C = C$ für jede Klasse C nach H ist.

Auf Grund des hiermit bewiesenen Hilfssatzes folgt nun:

Satz 1. *Dafür, daß eine quadratische Körperdiskriminante d und eine Idealgruppe H vom Index 3 im quadratischen Körper $Q = R(\sqrt{d})$ die Invarianten eines kubischen Zahlkörpers K sind, ist notwendig und hinreichend, daß bei der Substitution $\tau = (\sqrt{d} \to -\sqrt{d})$ von Q zwar H invariant ist:*

$$H' = H, \tag{1}$$

aber die beiden von H selbst verschiedenen Klassen C und $C^2 = C^{-1}$ nach H nicht invariant sind:

$$C' = C^{-1}. \tag{2}$$

Beweis. a) Es seien d, H die Invarianten eines kubischen Zahlkörpers K. Der zugehörige bikubische Körper B ist Galoissch, aber nicht Abelsch über dem rationalen Körper R. Nach dem Hilfssatz, angewandt auf $k_0 = R$, $k = Q$, $A = B$, sind also (1) und (2) erfüllt.

b) Es seien (1) und (2) erfüllt. Nach dem Existenzsatz der Klassenkörpertheorie gibt es zu H einen Klassenkörper B über Q. Dieser ist dann nach dem Hilfssatz Galoissch, aber nicht Abelsch über dem rationalen Körper R. Er ist vom Grade 3 über Q, also vom Grade 6 über R. Da es nur eine nicht-Abelsche Gruppe der Ordnung 6 gibt, nämlich $\mathfrak{S}$, hat B/R diese zur Galoisschen Gruppe. Den drei verschiedenen konjugierten Untergruppen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{S}$ entsprechend enthält B drei verschiedene konjugierte kubische Körper K, K_1, K_2. Somit sind d, H die Invarianten eines kubischen Zahlkörpers K.

Das in Satz 1 erhaltene Kriterium läßt sich auch so aussprechen:

Satz 2. *Eine quadratische Körperdiskriminante d und eine Idealgruppe H vom Index 3 im quadratischen Körper $Q = R(\sqrt{d})$ sind dann und nur dann die Invarianten eines kubischen Zahlkörpers K, wenn H alle zum Führer $\mathfrak{f}$ primen rationalen Zahlen enthält*[16]).

Beweis. a) Es seien (1) und (2) erfüllt. Dann kann eine zu $\mathfrak{f}$ prime rationale Zahl a wegen $a' = a$ nicht zu C oder C^{-1} gehören, gehört also zu H.

b) Es gehöre jede zu $\mathfrak{f}$ prime rationale Zahl zu H. Dann gehört einerseits mit einem zu $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ primen Ideal $\mathfrak{a}$ aus Q auch das konjugierte $\mathfrak{a}' = N(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ zu H; es ist also (1) erfüllt[17]) (und somit insbesondere $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}$). Wenn andererseits $\mathfrak{a}$ zu C gehört, so gehört $\mathfrak{a}' = N(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ zu C^{-1}; es ist also (2) erfüllt.

§ 3.

Die Arithmetik in Abhängigkeit von den Invarianten.

Aus der Tabelle entnimmt man ohne weiteres das folgende *Gesetz für die Diskriminante D von K* in Abhängigkeit von den Invarianten d, H von K:

[16]) Ich nenne eine Zahl zu H gehörig, wenn das durch sie erzeugte Hauptideal zu H gehört.

[17]) Für die Gleichheit zweier Idealgruppen genügt die Übereinstimmung in den zu einen beliebigen Ideal ($\neq 0$) primen Idealen (B. I, § 3). — Mit nur „$\mathfrak{a}$ prim zu $\mathfrak{f}$“ kommt man hier deshalb nicht aus, weil dann zunächst nicht feststeht, ob auch $\mathfrak{a}'$ prim zu $\mathfrak{f}$ ist.

Satz 3. *Die Diskriminante D von K bestimmt sich aus d und dem Führer $\mathfrak{f}$ von H nach der Formel:*

$$D = dN(\mathfrak{f}).$$

Hinsichtlich der Vorzeichen stimmt diese Formel ebenfalls, auf Grund der in § 1, (1) vermerkten Relation:

$$D = df^2.$$

Nach der Tabelle, oder auch nach Satz 1, ist nun $\mathfrak{f}$ bei der Substitution τ von Q invariant: $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}$, also $N(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}^2$. Der Vergleich der beiden Formeln für D liefert daher die wichtige Tatsache:

Satz 4. *Der Führer $\mathfrak{f}$ von H ist gleich der ganzen rationalen Zahl f aus* § 1, (1):

$$\mathfrak{f} = f.$$

Im Anschluß hieran sei noch folgendes bemerkt: Nach den Sätzen 2, 4 enthält H alle zu f primen Zahlen aus Q, die mod f einer rationalen Zahl kongruent sind, d. h. den *Ring* mod f *in* Q[18]). Die Diskriminante dieses Ringes stimmt mit der kubischen Körperdiskriminante $D = df^2$ überein. Weil H den Ring mod f in Q enthält, ist nach dem Anordnungssatz der Klassenkörpertheorie B, also auch K, im Ringklassenkörper mod f zu Q enthalten. Für $D < 0$ lassen sich daher die Zahlen aus B, also speziell die aus K, rational über Q durch den singulären Wert $j(f\omega)$ der elliptischen Modulfunktion darstellen[19]), wo $1, \omega$ eine Basis für die ganzen Zahlen aus Q bedeutet.

Aus der Tabelle liest man ferner ohne weiteres das *Zerlegungsgesetz für die Primzahlen p aus R in B* in Abhängigkeit von den Invarianten ab. Bei seiner Formulierung mögen nicht nur die Zerlegungstypen in K, sondern sogar die in B, also alle in der Tabelle einzeln aufgeführten Zerlegungstypen unterschieden und der Einfachheit halber durch ihre Zeilennummer in der Tabelle mitgeteilt werden.

Satz 5. *Die Primzahlen p aus R werden in K und in B nach dem Gesetz zerlegt:*

Geht p nicht in D auf, so liegt Zeile 1, 2 *oder Zeile* 3 *vor, je nachdem* $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$ *oder* $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ *ist; und im ersteren Falle Zeile* 1 *oder Zeile* 2, *je nachdem die beiden Primfaktoren* $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ *von p in Q zu H gehören oder nicht*[20]).

---

[18]) B. I, § 10.

[19]) B. I, Satz 20.

[20]) Nach Satz 1 gehören $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ entweder beide zu H oder beide nicht.

Geht $p \neq 2, 3$ *in* D *auf, so liegt Zeile* 4 *oder Zeile* 5 *oder Zeile* 6 *vor, je nachdem* $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$ *oder* $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ *oder* $\left(\frac{d}{p}\right) = 0$ *ist.*

Geht $p = 2$ *in* D *auf, so liegt Zeile* 5 *oder Zeile* 10 *vor, je nachdem* $\left(\frac{d}{2}\right) = -1$ *oder* $\left(\frac{d}{2}\right) = 0$ *ist.*

Geht $p = 3$ *in* D *auf, so liegt Zeile* 6 *oder Zeile* 7, 8, 9 *vor, je nachdem* 3 *in* f *nicht aufgeht oder aufgeht* (*d. i. auch: je nachdem* 3 *in* D *nur zur ersten oder zu einer höheren Potenz aufgeht*); *und im letzteren Falle Zeile* 7 *oder Zeile* 8 *oder Zeile* 9, *je nachdem* $\left(\frac{d}{3}\right) = +1$ *oder* $\left(\frac{d}{3}\right) = -1$ *oder* $\left(\frac{d}{3}\right) = 0$ *ist.*

Die Unterscheidung der Zeilen 1 und 2 im ersten Teil des Satzes 5 hängt wesentlich von der Invariante H ab. Außer bei dieser Unterscheidung ist aber eine Bezugnahme auf die Invariante H weder im Zerlegungsgesetz (Satz 5) noch im Diskriminantengesetz (Satz 3) erforderlich; man kommt vielmehr im übrigen schon mit der Invariante d und dem Führer $\mathfrak{f}$ von H aus. Gemäß Satz 4 ist also insbesondere *das Zerlegungsgesetz im kubischen Zahlkörper* K — *bis auf jene Unterscheidung — schon durch die Diskriminante* D *von* K *bestimmt.*

Bei der in Satz 5 gegebenen Unterscheidung der verschiedenen Zerlegungstypen (Zeilen der Tabelle) sind nicht alle in den Spalten 5 bis 13 zur Verfügung stehenden Merkmalunterschiede der Zeilen ausgenutzt worden. Das bedeutet das Bestehen gewisser „Bindungen".

So ergibt sich aus den bisher nicht verwendeten Bedingungen: „$\mathfrak{p}$ in H" in Spalte 7, Zeile 3, 6, 10 die Bindung:

Geht p *nicht in* f *auf und ist* $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ *oder* $\left(\frac{d}{p}\right) = 0$, *so gehört der Primteiler* $\mathfrak{p}$ *von* p *in* Q *zu* H.

Das ist auch schon auf Grund von Satz 1 klar, wonach alle zu f primen, bei τ invarianten Ideale aus Q zu H gehören.

Weiter ergeben sich in dieser Weise die Bindungen:

Geht $p \neq 3$ *in* f *auf, so geht genau* p^1 *in* f *auf.*

Geht $p \neq 3$ *in* f *auf, so geht* p *nicht in* d *auf.*

Geht $p \neq 3$ *in* f *auf und ist* $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$, *so ist* $p \equiv +1 \bmod 3$.

Die erstere Tatsache macht man sich auch so klar: Die Gruppe „$\equiv 1 \bmod p^{\nu}$" aus Q hat in der Gruppe „$\equiv 1 \bmod p$" aus Q eine Potenz von p, also eine zu 3 prime Zahl zum Index. Als Führer der Idealgruppe H vom Index 3 kann also f höchstens durch p^1 teilbar sein. Die letzteren Tatsachen folgen dann wieder auch schon aus Satz 2. Die Gruppe der ratio-

nalen primen Restklassen mod p hat nämlich in der Gruppe aller primen Restklassen mod p aus Q den Index $p - \left(\frac{d}{p}\right)$. Da H alle zu f primen rationalen Zahlen enthält und den Index 3 hat, so muß $p - \left(\frac{d}{p}\right)$ durch 3 teilbar sein, wenn p und somit genau p^1 in f aufgeht. Für $\left(\frac{d}{p}\right) = 0$ und $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$ ergibt das die letztgenannten Bindungen. Für $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ ergibt sich überdies analog:

Geht $p \neq 3$ in f auf und ist $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, so ist $p \equiv -1 \bmod 3$.

Das ist die in § 1 schon angekündigte Ergänzung zu Spalte 5, Zeile 5 der Tabelle.

Schließlich liest man aus der Tabelle ab:

Geht $p = 3$ in f, aber nicht in d auf, so geht genau 3^2 in f auf.

Geht $p = 3$ in f und in d auf, so geht genau 3^1 oder 3^2 in f auf.

Diese Tatsachen macht man sich wieder auch so klar: Weil alle Zahlen $\equiv 1 \bmod 3^2$ aus Q dritte Potenzreste mod 3^r für beliebiges r sind, kann f höchstens durch 3^2 teilbar sein. Weil ferner die prime Restklassengruppe mod 3^1 in Q von zu 3 primer Ordnung ist, wenn 3 nicht in d aufgeht, kann in diesem Falle f nicht genau durch 3^1 teilbar sein.

Die zweite der beiden zuletzt genannten Tatsachen läßt sich noch etwas verschärfen, wenn man wieder Satz 2 heranzieht. Die prime Restklassengruppe mod 3^2 in Q hat nämlich, wenn $d \equiv 0 \bmod 3$, die folgenden Basiselemente:

$$-1, \quad 1 + \sqrt{d}, \quad 1 + 3, \quad 1 + 3\sqrt{d}.$$

Von diesen spielen die rationalen -1, $1 + 3$ zufolge Satz 2 für die Bildung von H keine Rolle. Ferner sind, weil H den Index 3 hat, etwaige dritte Potenzreste mod 3^2 überflüssig. Nun ist $1 + 3\sqrt{d}$ dann und nur dann dritter Potenzrest mod 3^2, wenn in

$$(1 - \sqrt{d})^3 \equiv 1 - (3 + d)\sqrt{d} \bmod 3^2$$

der Koeffizient $3 + d \not\equiv 0 \bmod 3^2$ ist, d. h. wenn $d \not\equiv 3 \bmod 9$ ist. In diesem Falle also bleibt $1 + \sqrt{d}$ als einziges in Frage kommendes Basiselement übrig, so daß dann f höchstens durch 3^1 teilbar sein kann:

Geht $p = 3$ in f und in d auf und ist $d \equiv +3 \bmod 9$, so geht genau 3^1 in f auf.

Das ist die in § 1 schon angekündigte Ergänzung zu Zeile 9, Spalte 8 der Tabelle. Im Falle $d \equiv -3 \bmod 9$ dagegen kann f genau durch 3^1 oder auch 3^2 teilbar sein.

§ 4.

Kubische Zahlkörper vorgegebener Diskriminante.

Die vorstehend entwickelte Theorie gestattet es, die Frage in Angriff zu nehmen, ob eine vorgegebene ganze rationale Zahl $D \neq 0$, die der allgemein-notwendigen Zahlkörper-Diskriminanten-Bedingung[21]):

$$D \equiv 0 \text{ oder } 1 \bmod 4$$

genügt, die Diskriminante eines kubischen Zahlkörpers K ist, und wie groß die Anzahl $N(D)$ aller zu ihr gehörigen nicht-konjugierten kubischen Zahlkörper ist.

Aus den Feststellungen am Schluß von § 3 ergibt sich zunächst:

Satz 6. *Dafür, daß zu D mindestens ein kubischer Zahlkörper K gehört, d. h. daß $N(D) > 0$ ist, ist notwendig, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

Spaltet man von D die zugehörige quadratische Körperdiskriminante d ab:

$$D = df^2,$$ [21])

so muß die dabei auftretende ganze rationale Zahl f eine der Gestalten haben:

a) $f = p_1 \cdots p_n$,

b) $f = p_1 \cdots p_n 3^w$, $w = 1$ *oder* 2,

wo die p_i $(i = 1, \ldots, n;\ n \geqq 0)$ untereinander und von 3 verschiedene Primzahlen mit der Kongruenzeigenschaft

$$p_i \equiv \left(\frac{d}{p_i}\right) \bmod 3$$

sind, und wo im Falle b)

für $d \not\equiv 0 \bmod 3$,	$w = 2$,
für $d \equiv +3 \bmod 9$,	$w = 1$,
für $d \equiv -3 \bmod 9$,	$w = 1$ *oder* 2

ist.

Es sei weiterhin vorausgesetzt, daß diese Bedingungen erfüllt sind.

Nach den Sätzen 2, 4 gilt nun:

Satz 7. *Die Anzahl $N(D)$ der nicht-konjugierten kubischen Zahlkörper mit der Diskriminante D ist gleich der Anzahl der verschiedenen Idealgruppen H vom Index 3 im quadratischen Zahlkörper $Q = R(\sqrt{d})$, die den Ring* mod f *in Q enthalten und die f selbst (nicht schon einen echten Teiler von f) zum Führer haben.*

---

[21]) Gemäß S. 566, Anm. [4]) wird hier vorausgesetzt, daß $d \neq 1$, d. h. daß D keine Quadratzahl ist.

Um diese Anzahl zu ermitteln, hat man eine geeignete Basis der Ringklassengruppe mod f in Q aufzustellen. Außer dem Ring mod f dürfen dabei, weil die Idealgruppen H den Index 3 haben sollen, auch alle dritten Idealpotenzen in die Hauptklasse genommen werden. Die Hauptklasse ist dann also die Idealgruppe J aller $\mathfrak{a}_0^3 r\gamma$, wo $\mathfrak{a}_0$ ein zu f primes Ideal aus Q, ferner r eine zu f prime rationale Zahl, und γ eine Zahl $\equiv 1 \bmod f$ aus Q ist.

Um eine geeignete Basis nach J zu erhalten, bestimme man zunächst eine geeignete Basis nach der Zahlgruppe Z aller $\alpha_0^3 r\gamma$, wo α_0 eine zu f prime Zahl aus Q ist und r, γ dieselbe Bedeutung wie oben haben.

Die folgendermaßen gewählten Zahlen ϱ_i aus Q bilden eine Basis nach Z:

Zu jeder in f aufgehenden von 3 verschiedenen Primzahl p_i eine Zahl

$$\varrho_i \equiv \text{prim. Wurzel mod } \mathfrak{p}_i, \qquad \varrho_i \equiv 1 \bmod \frac{f}{\mathfrak{p}_i},$$

wo $\mathfrak{p}_i$ der bzw. einer der beiden Primteiler von p_i in Q ist.

Im Falle b) zu der in f aufgehenden Primzahl 3

b_1) für $d \not\equiv 0 \bmod 3$, also $w = 2$, eine Zahl

$$\varrho_{n+1} \equiv 1 + 3\sqrt{d} \bmod 3^2, \qquad \varrho_{n+1} \equiv 1 \bmod \frac{f}{3^2},$$

b_2) für $d \equiv +3 \bmod 9$, also $w = 1$, und für $d \equiv -3 \bmod 9$, $w = 1$ eine Zahl

$$\varrho_{n+1} \equiv 1 + \sqrt{d} \bmod 3, \qquad \varrho_{n+1} \equiv 1 \bmod \frac{f}{3},$$

b_3) für $d \equiv -3 \bmod 9$, $w = 2$ zwei Zahlen

$$\varrho_{n+1} \equiv 1 + 3\sqrt{d} \bmod 3^2, \qquad \varrho_{n+1} \equiv 1 \bmod \frac{f}{3^2},$$

$$\varrho_{n+2} \equiv 1 + \sqrt{d} \bmod 3^2, \qquad \varrho_{n+2} \equiv 1 \bmod \frac{f}{3^2}.$$

Entsprechend den in Satz 6 und ausführlicher soeben unterschiedenen Fällen werde noch gesetzt:

$$\text{a)}\ \delta = 0, \quad \mathrm{b}_1)\ \delta = 1, \quad \mathrm{b}_2)\ \delta = 1, \quad \mathrm{b}_3)\ \delta = 2,$$

so daß $n + \delta$ die Anzahl der Basiselemente ϱ_i, d. i. der Rang bez. 3 der Zahlklassengruppe nach Z ist.

Durch die Basis ϱ_i läßt sich jede zu f prime Zahl α aus Q in der Form darstellen:

$$\alpha \sim \prod_{i=1}^{n+\delta} \varrho_i^{y_i} \quad (Z) \tag{1}$$

mit mod 3 eindeutig bestimmten Exponenten y_i.

Um jetzt eine Basis nach J zu erhalten, wähle man aus den Klassen einer Basis der absoluten Idealklassengruppe, deren Ordnungen Potenzen von 3 sind, je ein zu f primes Ideal $\mathfrak{r}_i$ $(i = 1, \ldots, e;\ e \geqq 0)$.

Dann läßt sich jedes zu f prime Ideal $\mathfrak{a}$ aus Q in der Form darstellen:

$$\mathfrak{a} \sim \prod_{i=1}^{e} \mathfrak{r}_i^{x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n+\delta} \mathfrak{o}_i^{y_i} \quad (J). \tag{2}$$

Dabei sind die Exponenten x_i mod 3 eindeutig bestimmt, nicht aber notwendig auch die Exponenten y_i, wegen der von den Darstellungen (1) der dritten Idealpotenzzahlen $\varepsilon_k = \mathfrak{a}_k^3$ aus Q:

$$\varepsilon_k \sim \prod_{i=1}^{n+\delta} \mathfrak{o}_i^{y_{ik}} \quad (Z)$$

herrührenden Relationen:

$$\prod_{i=1}^{n+\delta} \mathfrak{o}_i^{y_{ik}} \sim 1 \quad (J). \tag{3}$$

Es darf nämlich zu den y_i in (2) eine beliebige Linearkombination der y_{ik} aus (3) hinzugefügt werden[22]).

Es wäre hier unzweckmäßig, von der nicht notwendig unabhängigen Basis $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{o}_i$ nach J durch Elimination der Relationen (3) zu einer unabhängigen Basis nach J überzugehen, weil dabei die Beziehung der einzelnen Basiszahlen $\mathfrak{o}_i$ zu den einzelnen Primteilern von f verloren ginge, und damit die Möglichkeit, einfach zum Ausdruck zu bringen, daß eine Idealgruppe H nach J vom Index 3 den Führer f selbst (und nicht schon einen echten Teiler von f) hat. Mittels der Basis $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{o}_i$ kann das letztere leicht in folgender Weise geschehen:

Jede Idealgruppe H nach J vom Index 3 wird durch eine lineare Kongruenz:

$$L(x_i, y_i) \equiv \sum_{i=1}^{e} X_i x_i + \sum_{i=1}^{n+\delta} Y_i y_i \equiv 0 \bmod 3 \tag{4}$$

definiert, d. h. H besteht aus allen und nur den zu f primen Idealen $\mathfrak{a}$, deren Exponenten x_i, y_i aus der Basisdarstellung (2) dieser Kongruenz genügen. Damit umgekehrt eine solche lineare Kongruenz (4) eine Idealgruppe H nach J vom Index 3 definiert, ist notwendig und hinreichend, daß L mod 3 für die Exponenten y_{ik} der (a fortiori zu H gehörigen) dritten Idealpotenzzahlen $\varepsilon_k = \mathfrak{a}_k^3$ verschwindet, d. h. daß entsprechend den

[22]) Es genügt natürlich, die endlich vielen, in bezug auf die Gruppe der dritten Zahlpotenzen in Q unabhängigen dritten Idealpotenzzahlen ε_k zu betrachten, das sind die frühesten Zahlpotenzen der Ideale $\mathfrak{r}_i$ und für $d > 0$ und $d = -3$ noch die Grundeinheit von Q.

Relationen (3) die Kongruenzrelationen bestehen:

$$L(0, y_{ik}) \equiv \sum_{i=1}^{n+\delta} Y_i y_{ik} \equiv 0 \bmod 3. \tag{5}$$

Solchen Linearformen L, die mod 3 nicht proportional sind, entsprechen verschiedene Idealgruppen H und umgekehrt. Damit schließlich H den Führer f (und nicht schon einen echten Teiler von f hat), ist notwendig und hinreichend, daß jede einzelne der f zusammensetzenden Primzahlpotenzen p_i und evtl. 3^w in der Definitionskongruenz (4) von H wirklich mitspricht, d. h. daß alle Koeffizienten Y_i von L mod 3 nicht verschwinden, bis auf den willkürlich bleibenden Koeffizienten Y_{n+2} im Falle b_3).

Im Hinblick auf Satz 7 ist damit bewiesen:

Satz 8. *Die Anzahl $N(D)$ der nicht-konjugierten kubischen Zahlkörper mit der Diskriminante D ist gleich der Anzahl der* mod 3 *nicht proportionalen Systeme X_i, Y_i, bei denen die Y_i die Kongruenzen* (5) *befriedigen, und alle $Y_i \not\equiv 0$* mod 3 *sind, bis auf das willkürlich bleibende Y_{n+2} im Falle* b_3).

Es ist nicht gesagt, daß $N(D) > 0$ sei, wenn die Bedingungen von Satz 6 erfüllt sind, d. h. diese Bedingungen sind zwar notwendig, aber nicht hinreichend für $N(D) > 0$. Denn es kann sehr gut sein, daß die Kongruenzen (5) gar keine Lösungen Y_i der in Satz 8 verlangten Art besitzen.

Auf Grund von Satz 8 ergeben sich für die Anzahl $N(D)$ folgende Ausdrücke:

I. $f = 1$.

Dann treten die Y_i, und somit die Kongruenzen (5) gar nicht auf. Daher ist

$$N(D) = \frac{3^e - 1}{2}.$$

Insbesondere ist also $N(D) = 0$ oder $N(D) > 0$, je nachdem $e = 0$ oder $e > 0$ ist, d. h. je nachdem die Klassenzahl von $Q = R(\sqrt{d})$ durch 3 nicht teilbar oder teilbar ist.

II. $f > 1$.

Dann tritt mindestens ein Y_i auf. Bezeichnet $L(D)$ die Anzahl der mod 3 nicht proportionalen Lösungen Y_i der in Satz 8 verlangten Art, so ist daher

$$N(D) = 3^e L(D).$$

Besonders einfach ist der Fall, daß $f > 1$ ist und keine von der Zahlgruppe Z unabhängige dritte Idealpotenzzahl existiert. Dann tritt keine Kongruenz (5) auf. Liegt daher nicht der Fall b_3) vor, so ist $L(D) = 2^{n+\delta-1}$.

Liegt aber der Fall b_3) vor, so ist $L(D) = 3 \cdot 2^n$. Es ist also

$$N(D) = 3^e \cdot 2^{n+\delta-1}, \text{ wenn nicht der Fall } b_3) \text{ vorliegt,}$$

$$N(D) = 3^{e+1} \cdot 2^n, \text{ wenn der Fall } b_3) \text{ vorliegt.}$$

Insbesondere ist dann stets $N(D) > 0$.

Mittels der letzteren Ausdrücke läßt sich leicht die gegenüber den quadratischen Zahlkörpern abweichende Tatsache folgern:

Satz 9. *Es gibt Zahlen D, für die $N(D)$ beliebig groß ist, d. h. für die beliebig viele kubische Zahlkörper K der Diskriminante D existieren —, sogar bei vorgegebener quadratischer Körperdiskriminante d.*

Beweis. Man setze f in der Form an:

$$f = p_1 \cdots p_n,$$

wo die p_i untereinander und von 3 verschiedene Primzahlen mit den Eigenschaften

$$\left(\frac{d}{p_i}\right) = +1, \qquad p_i \equiv 1 \bmod 3$$

sind. Es genügt dann zu zeigen, daß es beliebig viele Primzahlen p_i mit diesen Eigenschaften gibt, für die zudem jeweils alle dritten Idealpotenzzahlen ε_k aus Q in derjenigen Zahlgruppe Z_i liegen, die zu p_i ebenso gehört, wie oben Z zu f. Denn dann liegen die ε_k für jedes Produkt f aus solchen Primzahlen in der Zahlgruppe Z. Nun besteht Z_i aus denjenigen primen Restklassen $\alpha \bmod p_i$, für die $\frac{\alpha'}{\alpha} \equiv \xi^3 \bmod \mathfrak{p}_i$ für einen der beiden in p_i aufgehenden Primteiler $\mathfrak{p}_i$ aus Q ist. Daher genügt es, die Existenz beliebig vieler Primideale ersten Grades $\mathfrak{p}_i$ in Q festzustellen, für die einerseits $N(\mathfrak{p}_i) = p_i \equiv 1 \bmod 3$ ist, und andererseits alle ε_k dritte Potenzreste mod $\mathfrak{p}_i$ sind. Das wiederum kommt, wenn die dritten Einheitswurzeln zu Q adjungiert werden, auf die Existenz beliebig vieler Primideale ersten Grades $\overline{\mathfrak{p}}_i$ in $Q(\sqrt{-3})$ hinaus, für die alle dritten Potenzrestsymbole $\left(\frac{\varepsilon_k}{\overline{\mathfrak{p}}_i}\right) = 1$ sind. Solche Primideale $\overline{\mathfrak{p}}_i$ gibt es aber bekanntlich in beliebiger Anzahl[23]).

Halle, 8. April 1929.

---

[23]) Siehe etwa B. Ia, § 11, Satz 11.

(Eingegangen am 12. April 1929.)

Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie.

Von

G. Szegö in Königsberg.

Im folgenden soll versucht werden, einige Sätze der Funktionentheorie, welche in den Ideenkreis des Koebeschen Verzerrungssatzes gehören, auf die räumliche Potentialtheorie zu übertragen. Es gelingt dies insbesondere für die bekannten Bieberbachschen Flächensätze. Dagegen zeigt sich, daß einige mit dem Verzerrungssatz gleichwertige Sätze der Funktionentheorie sich nicht unmittelbar auf die räumliche Potentialtheorie ausdehnen lassen.

Die Übertragung der Bieberbachschen Flächensätze beruht auf dem folgenden Extremalsatze:

I. *Unter allen Kondensatoren, deren Außen- und Innenfläche gegebene Volumina besitzen, hat derjenige die kleinste Kapazität, welcher aus zwei konzentrischen Kugeln besteht.*

Unter einem Kondensator verstehen wir zwei geschlossene analytische Flächen F_0 und F_1; die Innenfläche F_0 liege dabei ganz im Innern der Außenfläche F_1. Vorgegeben sind die Volumina V_0 und V_1 der von F_0 und F_1 umschlossenen Bereiche. Es ist natürlich $V_0 < V_1$.

Bezeichnet $\varphi(x, y, z)$ diejenige zwischen F_0 und F_1 reguläre harmonische Funktion, welche auf F_0 den Wert 0 und auf F_1 den Wert 1 annimmt, so wird, wie bekannt,

$$K = \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma, \tag{1}$$

wobei das Integral über eine F_0 enthaltende und ganz innerhalb von F_1 gelegene geschlossene Fläche zu erstrecken ist, von der Wahl dieser Fläche unabhängig. Hierbei ist die Normale nach außen, d. h. in der Richtung der wachsenden Werte von φ zu richten. Die so definierte positive Zahl K heißt die Kapazität des gegebenen Kondensators.

Der obige Satz läßt sich nun in der Ungleichung

$$K \geqq \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{V_0^{-\frac{1}{3}} - V_1^{-\frac{1}{3}}} \tag{2}$$

aussprechen, wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die beiden Randflächen konzentrische Kugeln sind. Bezeichnen nämlich R_0 und R_1 die Radien derselben, so ist

$$\frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{V_0^{-\frac{1}{3}} - V_1^{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{R_0^{-1} - R_1^{-1}},$$

d. h. der bekannte Ausdruck für die Kapazität eines konzentrischen Kugelkondensators[1]).

Den in § 2, 1 erwähnten Spezialfall dieses Satzes hat Poincaré in einer Comptes-Rendus-Note aus dem Jahre 1887 ausgesprochen[2]), doch ohne ausreichenden Beweis. Eine kurze Beweisandeutung findet sich in einer Arbeit von Herrn G. Faber[3]). Der in § 1 gegebene Beweis scheint etwas durchsichtiger zu sein als der von Herrn Faber angedeutete. In § 2 zeigen wir, wie man hieraus das räumliche Analogon der Bieberbachschen Flächensätze herleitet. Dabei ergibt sich auch für den ebenen Fall ein neuer Beweis, ferner auch ein neuer Zugang zu den von den Herren T. Carleman, G. Pólya sowie dem Verfasser[4]) herrührenden zweidimensionalen Erweiterungen der Flächensätze (§ 4). In § 5 beschäftigen wir uns mit der Übertragung des Verzerrungssatzes auf den dreidimensionalen Fall. Die Resultate sind hier von negativer Natur. § 6 enthält weitere Bemerkungen.

§ 1.

Ein Satz über Kondensatoren.

Zum Beweis des Satzes I führen wir das Volumen $V(\varrho)$ des von der Niveaufläche $\varphi(x, y, z) = \varrho$ umschlossenen Bereiches ein, $0 \leqq \varrho \leqq 1$. Man hat

$$V(0) = V_0, \qquad V(1) = V_1.$$

[1]) Es ist in diesem Falle, wenn r den Abstand vom Mittelpunkte bedeutet,

$$\varphi = \frac{R_0^{-1} - r^{-1}}{R_0^{-1} - R_1^{-1}}.$$

[2]) H. Poincaré, Sur un théorème de M. Liapounoff, relatif à l'équilibre d'une masse fluide. Comptes Rendus **104** (1887), S. 622—625. Vgl. auch H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris (1903), S. 17.

[3]) Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1923, S. 169—172.

[4]) A. a. O. [8]) bzw. [10]).

Es sei $0 < \varrho < 1$. Das Volumen zwischen den beiden Niveauflächen $\varphi = \varrho$ und $\varphi = \varrho + \varepsilon$ kann bis auf Glieder zweiter Ordnung in ε in der Form

$$\varepsilon \iint\limits_{\varphi=\varrho} h \, d\sigma$$

dargestellt werden; h bedeutet hier den Grenzwert der durch ε dividierten Länge des Normalenstückes zwischen den beiden Niveauflächen für $\varepsilon \to 0$[5]). Man hat nun bis auf Glieder zweiter Ordnung in ε

$$\varphi(x + \varepsilon h \alpha,\ y + \varepsilon h \beta,\ z + \varepsilon h \gamma) = \varphi(x, y, z) + \varepsilon,$$

wenn α, β, γ die Richtungskosinus der nach außen weisenden Normale sind,

$$\alpha = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}, \qquad \beta = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}, \qquad \gamma = \frac{\varphi_z}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}.$$

Wir erhalten also, wie bekannt,

$$h = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}$$

und

$$V'(\varrho) = \iint\limits_{\varphi=\varrho} \frac{d\sigma}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}. \tag{3}$$

Zum Beweis von (2) beachte man jetzt, daß wegen (1)

$$4\pi K = \iint\limits_{\varphi=\varrho} \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}\, d\sigma$$

ist. Die Schwarzsche Ungleichung liefert also

$$4\pi K V'(\varrho) \geqq \left(\iint\limits_{\varphi=\varrho} d\sigma\right)^2 = (J(\varrho))^2,$$

wenn $J(\varrho)$ den Flächeninhalt der Niveaufläche $\varphi = \varrho$ bezeichnet. Es ist aber nach der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel

$$(J(\varrho))^3 \geqq 36\pi (V(\varrho))^2.$$

Man hat also

$$4\pi K V'(\varrho) \geqq (36\pi)^{\frac{2}{3}} (V(\varrho))^{\frac{4}{3}},$$

d. h.

$$\frac{K}{3} (V(\varrho))^{-\frac{4}{3}} V'(\varrho) \geqq \frac{(36\pi)^{\frac{2}{3}}}{12\pi} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Durch Integration dieser Ungleichung zwischen den Grenzen 0 und 1 folgt die Behauptung (2).

[5]) Man schließt dabei die ϱ-Werte, für welche $|\operatorname{grad} \varphi|$ auf $\varphi = \varrho$ verschwindet, aus. Die Anzahl derselben ist stets *endlich*; vgl. O. D. Kellogg, Foundations of potential theory (Berlin 1929), Chapter X, Theorem XIV, S. 276. — Ich verdanke Herrn Koebe ein Beispiel für das eigenartige Vorkommnis, daß $|\operatorname{grad} \varphi|$ verschwindet.

Das Gleichheitszeichen in (2) kann nur dann eintreten, wenn sowohl in der obigen Schwarzschen Ungleichung als auch in der isoperimetrischen Ungleichung für $0 < \varrho < 1$ die Gleichheit gilt. Sämtliche Niveauflächen $\varphi(x, y, z) = \varrho$ sind also Kugeln. Darüber hinaus muß auf der Fläche $\varphi(x, y, z) = \varrho$

$$\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} = \text{konst.}$$

gelten; diese Bedingung bedeutet, daß die Niveauflächen eine Schar von Parallelflächen bilden. Eine elementare Betrachtung lehrt nun, daß dies bei kugelförmigen Niveauflächen nur dann eintreten kann, wenn sie sämtlich konzentrisch sind.

Aus der letzten Ungleichung folgt übrigens, daß (abgesehen vom Falle des Kugelkondensators)

$$-K(V(\varrho))^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \varrho$$

eine monoton wachsende Funktion von ϱ ist.

§ 2.

Spezialfälle.

1. Zwei Spezialfälle des obigen Satzes seien besonders hervorgehoben. Unter der Kapazität k einer geschlossenen analytischen Fläche F verstehen wir die Kapazität des Kondensators, dessen Innenfläche F ist und dessen Außenfläche in eine unendlich große Kugel ausartet.

II′. *Unter allen analytischen Flächen mit gegebenem Volumen hat die Kugel die kleinste Kapazität.*

Es gilt somit, wenn V das Volumen von F bezeichnet,

$$k \geqq \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{oder} \qquad V \leqq \frac{4\pi}{3} k^3. \tag{4}$$

Diese Ungleichung folgt als ein Grenzfall aus (2). Sie kann natürlich auch direkt bewiesen werden, indem man die zu dem Äußeren von F gehörige „Greensche Funktion“ $G = 1 - \varphi$ betrachtet. Diese ist bekanntlich eine außerhalb von F reguläre harmonische Funktion, welche auf F den Wert 1 annimmt und für große Werte von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Form

$$G = \frac{k}{r} + \frac{Y_1(\theta, \varphi)}{r^2} + \frac{Y_2(\theta, \varphi)}{r^3} + \dots \tag{5}$$

hat, wo $Y_m(\theta, \varphi)$ eine Kugelflächenfunktion m-ter Ordnung bedeutet. Hier wird

$$k = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma, \tag{6}$$

die Integration über eine beliebige, F umschließende Fläche erstreckt. Die Normale ist nach innen zu richten. Bezeichnet $V(\varrho)$ das Volumen des von der Niveaufläche $G = \varrho$ begrenzten Bereiches, so liefert die obige Schlußweise

$$-\frac{k}{3}(V(\varrho))^{-\frac{4}{3}} V'(\varrho) \geqq \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}},$$

so daß die Funktion

$$k(V(\varrho))^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \varrho$$

mit ϱ monoton wächst, wenn F keine Kugel ist.

Als Beispiel sei die folgende Anwendung erwähnt.

Es seien $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Abstände eines variablen Punktes von n festen Punkten. Unter allen durch die Bedingung

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}\right) \geqq 1$$

charakterisierten Körpern besitzt die Kugel das größte Volumen[6]).

2. Es sei F eine den Nullpunkt enthaltende geschlossene analytische Fläche, G die zu dem Nullpunkt als Quellpunkt gehörige Greensche Funktion. Sie ist bekanntlich eine innerhalb von F mit Ausnahme des Nullpunktes reguläre harmonische Funktion, welche die Form

$$G(x, y, z) = \frac{1}{r} - H(x, y, z)$$

hat und auf der Begrenzungsfläche F verschwindet. Die Funktion H ist innerhalb von F regulär harmonisch. Sie ist dort, wie man leicht sieht, positiv; wir setzen $H(0, 0, 0) = \frac{1}{c}$. Es sei V das Volumen von F.

II″. *Das Volumen V wird bei gegebenem Werte von c dann Minimum, wenn F eine Kugel um den Nullpunkt als Mittelpunkt ist*[7]).

Man hat also die Ungleichung

$$V \geqq \frac{4\pi}{3} c^3. \tag{7}$$

Es sei $\varrho > 0$. Wir bezeichnen mit $V(\varrho)$ das Volumen des von der Niveaufläche $G = \varrho$ umschlossenen Bereiches. Diese Niveaufläche und F be-

[6]) Bezüglich des Falles, wo dieser Körper aus mehreren getrennten Stücken besteht, vgl. die Bemerkung in § 3, **1**.

[7]) Dieses Problem ist im Laufe einer Unterhaltung des Verfassers mit Herrn K. Löwner (März 1927) aufgeworfen worden.

stimmen einen Kondensator, dessen Kapazität (man setze in (1): $\varphi = 1 - \varrho^{-1} G$)

$$K = \frac{\varrho^{-1}}{4\pi} \int\int_{G=\varrho} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varrho}$$

ist. (Die Normale wird nach innen gerichtet.) Man hat also wegen (2)

$$\frac{1}{\varrho} \geqq \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{(V(\varrho))^{-\frac{1}{3}} - V^{-\frac{1}{3}}},$$

d. h.

$$V^{-\frac{1}{3}} \leqq (V(\varrho))^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \varrho. \tag{8}$$

Wir lassen jetzt ϱ über alle Grenzen wachsen. Es sei ε eine beliebig kleine positive Zahl. Für genügend große Werte von ϱ wird innerhalb des Bereiches $G \geqq \varrho$ die Ungleichung

$$H \leqq \frac{1}{c} + \varepsilon$$

gelten. Dann ist aber in diesem Bereiche

$$G \geqq \frac{1}{r} - \frac{1}{c} - \varepsilon,$$

so daß die Kugel

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{c} - \varepsilon \geqq \varrho$$

ganz innerhalb des Bereiches $G \geqq \varrho$ liegt. Das Volumen $V(\varrho)$ ist somit größer als das Volumen der Kugel mit dem Radius

$$\left(\frac{1}{c} + \varepsilon + \varrho\right)^{-1},$$

d. h.

$$(V(\varrho))^{-\frac{1}{3}} \leqq \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{c} + \varepsilon + \varrho\right).$$

Vergleicht man dies mit der obigen Ungleichung, so folgt

$$V^{-\frac{1}{3}} \leqq \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{c} + \varepsilon\right)$$

und, da ε beliebig klein ist, die behauptete Ungleichung (7).

Die obige Schlußweise lehrt auch, daß die Funktion auf der rechten Seite von (8), d. h.

$$(V(\varrho))^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \varrho$$

mit ϱ monoton wächst.

§ 3.

Verallgemeinerung.

1. Es bereitet keinerlei Mühe, die Gültigkeit von Satz I für den Fall auszudehnen, in dem die innere oder äußere Begrenzung des Kondensators aus mehreren geschlossenen analytischen Flächen besteht. Besonders wichtig sind die entsprechenden Verallgemeinerungen von II′ bzw. II″. In II′ kann die gegebene Fläche offenbar durch ein System von beliebig vielen getrennt liegenden geschlossenen analytischen Flächen ersetzt werden; in II″ können wir aus dem Inneren von F beliebig viele von geschlossenen analytischen Flächen begrenzte Bereiche entfernen. Auch die oben bewiesenen Monotonitätssätze über die Funktion $V(\varrho)$ lassen sich unschwer in diesem Sinne verallgemeinern. Es würde schließlich keine Schwierigkeiten machen, die Bedingung des analytischen Charakters der Randflächen aufzuheben. In der allgemeinsten Fassung der Sätze II′ und II″ ist das Volumen durch das äußere bzw. innere Jordansche Maß zu ersetzen.

2. Die so verallgemeinerten Sätze II′ und II″ bilden *das räumliche Analogon der beiden Bieberbachschen Flächensätze* der Funktionentheorie. Die Flächensätze beziehen sich bekanntlich in ihrem ursprünglichen Umfange auf eine einzige geschlossene Kurve bzw. auf einen von einer einzigen Kurve umschlossenen Bereich. Die im Sinne von **1** gemeinte Verallgemeinerung für den ebenen Fall stammt von Herrn G. Pólya bzw. von dem Verfasser[8]). (Vgl. § 4.)

§ 4.

Der zweidimensionale Fall.

Die obigen Betrachtungen lassen sich fast wörtlich auf den zweidimensionalen Fall übertragen und liefern somit neue Beweise für die in § 3 erwähnten Flächensätze bzw. deren Verallgemeinerungen. Diese Beweise sind von den Methoden der Funktionentheorie gänzlich frei und beruhen auf den elementarsten potentialtheoretischen Schlüssen. In der Formel (1) für die Kapazität ist hierbei 4π durch 2π zu ersetzen. Die (2) entsprechende Ungleichung lautet sodann

$$K \geqq \frac{2}{\log \frac{F_1}{F_0}}, \tag{2′}$$

[8]) G. Pólya, Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. II. Mitteilung. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1928, S. 280—282. — G. Szegö, Verallgemeinerung des ersten Bieberbachschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. Ebenda 1928, S. 477—481.

wenn F_0 und F_1 den Flächeninhalt der von der inneren bzw. äußeren Randkurve des „Kondensators“ (Zylinderkondensator) umschlossenen Bereiche bedeuten. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn die beiden Randkurven konzentrische Kreise sind.

Bezeichnet $F(\varrho)$ den Inhalt des von der Niveaukurve $\varphi = \varrho$, wie in § 1, begrenzten Bereiches, $L(\varrho)$ die Länge dieser Kurve, so ist infolge der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises

$$(L(\varrho))^2 \geqq 4\pi F(\varrho)$$

und man erhält wie in § 1

$$2\pi K F'(\varrho) \geqq (L(\varrho))^2 \geqq 4\pi F(\varrho),$$

so daß

$$K \log F(\varrho) - 2\varrho \tag{9}$$

mit ϱ monoton wächst. Hieraus folgen von neuem die a. a. O. von Herrn G. Pólya bzw. von dem Verfasser bewiesenen Monotonitätssätze, sogar gleich für die Niveaukurven eines beliebigen Kondensators[9]).

Für den speziellen Fall, wo die Randkurven aus einem einzigen Stücke bestehen, ist die Ungleichung (2′) von Herrn T. Carleman bewiesen worden[10]). Sein Beweis beruht ebenfalls auf funktionentheoretischen Schlüssen.

§ 5.

Über das räumliche Analogon des Verzerrungssatzes.

Die vorhin bewiesene Übertragung der Bieberbachschen Flächensätze auf die räumliche Potentialtheorie scheint um so bemerkenswerter zu sein, weil mehrere andere mit dem Verzerrungssatz verknüpfte geometrische Eigenschaften von ebenen Figuren im dreidimensionalen Raume ihre Gültigkeit verlieren.

Es sei F eine Fläche mit der Kapazität 1 (vgl. § 2, **1**, (5), (6)). Wir fragen:

a) Gibt es eine absolute Konstante α, so daß, wenn F den Nullpunkt enthält,

$$|\operatorname{grad}\{r\, Y_1(\theta, \varphi)\}| \leqq \alpha$$

gilt? Hier hat Y_1 die gleiche Bedeutung wie in (5).

b) Gibt es eine absolute Konstante β, so daß für den Durchmesser D der Fläche F die Ungleichung

$$D \leqq \beta$$

gilt?

[9]) A. a. O. wird dies nur für gewisse spezielle Kondensatoren gezeigt.

[10]) T. Carleman, Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik, Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 208—212.

Es sei andererseits F eine den Nullpunkt enthaltende Fläche und

$$G = \frac{1}{r} - H$$

die in § 2, 2 definierte Greensche Funktion des von F begrenzten Bereiches. Es sei ferner $H(0, 0, 0) = 1$. Wir fragen weiter:

c) Gibt es eine absolute Konstante γ, so daß

$$|\operatorname{grad} H|_{x=y=z=0} \leqq \gamma$$

ist?

d) Gibt es eine absolute Konstante δ, so daß sämtliche Punkte der Fläche F außerhalb der um den Nullpunkt mit dem Radius δ beschriebenen Kugel liegen?

Setzt man in a):

$$r\,Y_1(\theta, \varphi) = l\,x + m\,y + n\,z,$$

so ist

$$|\operatorname{grad}\{r\,Y_1(\theta, \varphi)\}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Wir nennen den Punkt l, m, n den *natürlichen Schwerpunkt* von F [11]). Eine leichte Rechnung zeigt, daß er gegenüber Parallelverschiebungen der Fläche F invariant bleibt. Aus a) würde also folgen, daß die Fläche F ganz innerhalb einer um den natürlichen Schwerpunkt beschriebenen Kugel von festem Radius liegt. Insbesondere zieht a) die Gültigkeit von b) (mit $\beta = 2\alpha$) nach sich. Ferner zeigt die Transformation durch reziproke Radien, daß die Behauptungen a) und c) völlig gleichwertig sind. Schließlich folgt c) aus d), da H eine positive harmonische Funktion ist.

Nun sieht man leicht, daß eine Konstante β von der in b) genannten Art *nicht* existiert und hieraus folgt unmittelbar, daß alle vier Fragen verneinend zu beantworten sind. Es genügt zu diesem Zwecke ein Ellipsoid zu betrachten. Sind seine Halbachsen a, b, c, so gilt bekanntlich[12]) für seine Kapazität k die Formel

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}}. \tag{10}$$

---

[11]) Er kann als der Schwerpunkt einer auf der Fläche F ausgebreiteten Massenbelegung von der Dichte $\frac{\partial G}{\partial n}$ interpretiert werden („electric centre" bei Maxwell, a. a. O.[13])) und entspricht dem sogenannten konformen Schwerpunkt einer ebenen Kurve. Vgl. Ph. Frank und K. Löwner, Eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik, Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 78—86. (Vgl. S. 84.)

[12]) Vgl. die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. I. Herausgegeben von R. v. Mises, Braunschweig 1925, S. 488—489.

Wählt man hier $a > b$, $a > c$, ferner (bei festem b und c) a so groß, daß das Integral kleiner als 2 ist, so kann weiter durch stetige Verkleinerung von b und c erreicht werden, daß $k = 1$ wird. Es gibt also Ellipsoide mit der Kapazität 1, deren größte Achse beliebig groß ausfällt.

§ 6.

Bemerkungen.

1. Im Zusammenhange mit der Frage b) in § 5 bleibt die Frage offen, ob der Durchmesser der in § 2, **1** betrachteten Flächen F bei gegebener Kapazität seinen *kleinsten* Wert für die Kugel erreicht, d. h. ob

$$D \geqq 2k \tag{11}$$

gilt[13]).

Die analoge Ungleichung für die Flächen F des § 2, **2** lautet:

$$D \geqq 2c. \tag{12}$$

Sie ergibt sich unmittelbar durch Vergleichen von (7) mit der von Herrn Bieberbach herrührenden Ungleichung[14])

$$D \geqq \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}}. \tag{13}$$

2. Schließlich sei noch bemerkt, daß wir in dem Beweise von Satz I (§ 1) die Voraussetzung des harmonischen Charakters der Funktion φ nur in geringem Maße ausgenutzt haben. In der Tat beweist man fast wörtlich wie dort das folgende allgemeinere Theorem:

III. *Es sei $\varphi(x, y, z) = \varrho$ eine Schar von geschlossenen analytischen Flächen F_ϱ, die so beschaffen sind, daß die Fläche $F_{\varrho'}$ stets im Innern von $F_{\varrho''}$ verläuft, wenn $0 \leqq \varrho' < \varrho'' \leqq 1$ ist, $0 \leqq \varrho \leqq 1$. Es bezeichne V_0 und V_1 das Volumen von F_0 bzw. F_1. Wir schreiben ferner*

$$M(\varrho) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{\varphi=\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma, \tag{14}$$

[13]) Vgl. J. C. Maxwell, Electricity and Magnetism (3. Auflage, Oxford 1892), **1**, S. 117. Hier wird die Richtigkeit der Ungleichung (11) des Textes sozusagen als selbstverständlich angenommen.

[14]) L. Bieberbach, Über eine Extremaleigenschaft des Kreises. Jahresbericht der D. Math. Ver. **24** (1915), S. 247—250; vgl. auch W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 123.

wobei die Normale nach außen zu richten ist. Dann gilt

$$\frac{1}{\int_0^1 \frac{d\varrho}{M(\varrho)}} \geqq \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{V_0^{-\frac{1}{3}} - V_1^{-\frac{1}{3}}}. \tag{15}$$

Auf der linken Seite steht das „harmonische Mittel" der Funktion $M(\varrho)$.

In dem zweidimensionalen Falle lautet die entsprechende Ungleichung mit den Bezeichnungen von § 4 (in der Definition von $M(\varrho)$ ist 4π durch 2π zu ersetzen)

$$\frac{1}{\int_0^1 \frac{d\varrho}{M(\varrho)}} \geqq \frac{2}{\log \frac{F_1}{F_0}}. \tag{15'}$$

Die Ungleichungen (2) bzw. (2′) gehen hieraus hervor, wenn φ eine zwischen F_0 und F_1 reguläre harmonische Funktion ist, $M(\varrho) = \text{konst.} = K$.

Königsberg, April 1929.

(Eingegangen am 20. April 1929.)

Maximalbetrag und Maximalglied Dirichletscher Reihen.

Von

Binyamin Amirà in Jerusalem.

1. In den Untersuchungen über Maximalbetrag und Maximalglied einer Taylorschen Reihe hat Herr A. Wiman[1]) festgestellt, daß, wenn $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion ist, $M(r)$ ihr Maximalbetrag für $|z| = r$ und $m(r)$ der Maximalwert eines Gliedes der zugehörigen Taylorschen Reihe, es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele ins Unendliche wachsende r gibt mit

$$M(r) < m(r)\,[\log m(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Dies war eine Verschärfung Borelscher[2]) Resultate, aus denen schon folgte, daß es unendlich viele ins Unendliche wachsende r gibt mit

$$M(r) < [m(r)]^{1+\varepsilon}.$$

In einer kürzlich erschienenen Arbeit untersucht Herr K. Sugimura[3]) die Dirichletschen Reihen der Form

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \qquad (a_n \neq 0,\quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty,\quad s = \sigma + ti)$$

auf ihre beständige und absolute Konvergenz. Bezeichnet man mit $M(\sigma)$ die obere Grenze des absoluten Betrages der Reihe (1) auf der Geraden

[1]) A. Wiman, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe, Acta Mathematica **37**, S. 305 bis 326. — Vgl. auch G. Pólya, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe, Acta Mathematica **40**, S. 311 bis 319, wo der springende Punkt der Wimanschen Beweismethode eine klare und präzise Darstellung erhalten hat.

[2]) E. Borel, Leçons sur les fonctions entières, 2e éd. (Paris, 1921), S. 62 bis 70.

[3]) K. Sugimura, Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen, Math. Zeitschr. **29**, S. 264 bis 277.

$\Re(s) = \sigma$, und mit $m(\sigma)$ den größtmöglichen Wert eines Gliedes, so beweist er[4]) u. a., daß es eine gewisse Klasse Dirichletscher Reihen gibt mit

$$\lim_{\sigma=\infty} \frac{\log M(\sigma)}{\log m(\sigma)} = 1.$$

Für eine Funktion, die durch eine Reihe aus der erwähnten Klasse dargestellt ist, gibt es also jedenfalls zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele ins Unendliche wachsende σ mit

$$M(\sigma) < [m(\sigma)]^{1+\varepsilon}.$$

Ich untersuche im folgenden beständig und absolut konvergente Dirichletsche Reihen (1). Haben $M(\sigma)$ und $m(\sigma)$ die frühere Bedeutung und bezeichnet man mit Δ_ν das Minimum von $(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1})$ für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, 2\nu$ (λ_0 bedeutet 0), so beweise ich folgenden

Satz. *Es sei für die Reihe* (1) *bei festem* $c > 0$

$$\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(x^c), \tag{2}$$

und es sei für jedes $\delta > 0$

$$\frac{1}{\Delta_n} = O(n^\delta). \tag{3}$$

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ *unendlich viele ins Unendliche wachsende* σ *mit*

$$M(\sigma) < m(\sigma)\,[\log m(\sigma)]^{\frac{c}{2}+\varepsilon}.$$

Eine Taylorsche Reihe $f(z) = \sum_1^\infty c_n z^n$, in der Dirichletschen Schreibweise $g(s) = \sum_1^\infty c_n e^{n s}$, erfüllt offenbar die Voraussetzungen des Satzes ($\lambda_n \geqq n$, $c \leqq 1$, $\Delta_n \geqq 1$); und weil bei $r = e^\sigma$ der Maximalbetrag bzw. Maximalwert eines Gliedes von $f(z)$ für $|z| = r$ gleich ist dem Maximalbetrage bzw. Maximalwert eines Gliedes von $g(s)$ für $\Re(s) = \sigma$, so ist der Wimansche Satz in dem neuen enthalten. Da für Potenzreihen mit Lücken $c < 1$ ausfallen kann, so liefert dieser Satz auch eine Verschärfung des Wimanschen Satzes für Potenzreihen. Es wird sich auch herausstellen, daß eine sinn- und naturgemäße Übertragung der Wiman-Pólyaschen Beweismethode auf Dirichletsche Reihen für den Beweis des neuen Satzes ausreicht.

2. Es genügt offenbar, wie bei Taylorschen Reihen, sich beim Beweise auf solche Reihen (1) zu beschränken, bei denen alle $a_n > 0$ sind und *jedes* Glied (sei es in einem Intervalle von σ-Werten, sei es auch nur in

[4]) Loc. cit., Satz 5.

einem Punkte) einmal die Rolle des größten Gliedes übernimmt. Bezeichnet man mit σ_ν für $\nu \geqq 2$ die Sprungstelle, bei der das ν-te Glied sein Amt als größtes Glied antritt, mit σ_1 irgendeine endliche Zahl $\leqq \sigma_2$, so ist

$$\sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_\nu \to \infty,$$

und man erhält rekursiv (wie bei Taylorschen Reihen) für $\sigma_\nu \leqq \sigma \leqq \sigma_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$

$$m(\sigma) = m(\sigma_1)\, e^{-\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \sigma_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) + \lambda_\nu \sigma} \qquad (\lambda_0 \text{ bedeutet } 0), \tag{4}$$

somit

$$a_\nu = m(\sigma_1)\, e^{-\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \sigma_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1})};$$

da hier

$$M(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n \sigma}$$

ist, so ist, wenn man für $\sigma_\nu \leqq \sigma \leqq \sigma_{\nu+1}$

$$M(\sigma) = m(\sigma) \cdot \mu(\sigma) \tag{5}$$

setzt,

$$\mu(\sigma) = 1 + \sum_{n=1}^{\nu-1} e^{\sum_{\varkappa=n+1}^{\nu} \sigma_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) - \sigma(\lambda_\nu - \lambda_n)} + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} e^{-\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} \sigma_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) + \sigma(\lambda_n - \lambda_\nu)}. \tag{6}$$

Es muß also gezeigt werden, daß man zu jedem $\varepsilon > 0$ beliebig große σ finden kann, für die

$$\mu(\sigma) < [\log m(\sigma)]^{\frac{c}{2} + \varepsilon}.$$

3. Ich beweise zunächst den

Hilfssatz 1. *Eine reelle Folge $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ habe die Eigenschaft*

$$\lim_{n=\infty} l_n = +\infty,$$

und es sei

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty.$$

Dann gibt es unendlich viele ν, zu denen man Zahlen A bestimmen kann, so daß ***alle*** *Ungleichungen*

$$\frac{l_{\varkappa+1}(\lambda_{\varkappa+1} - \lambda_k) + l_{\varkappa+2}(\lambda_{\varkappa+2} - \lambda_{\varkappa+1}) + \ldots + l_\nu (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})}{\lambda_\nu - \lambda_\varkappa} \leqq A \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

$$A \leqq \frac{l_{\nu+1}(\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) + l_{\nu+2}(\lambda_{\nu+2} - \lambda_{\nu+1}) + \ldots + l_{\nu+p}(\lambda_{\nu+p} - \lambda_{\nu+p-1})}{\lambda_{\nu+p} - \lambda_\nu} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

erfüllt sind.

Beweis[5]). Für jede festgegebene Zahl μ werden wir einen Index $\nu \geqq \mu$ finden, für den das Gewünschte zutrifft. Man nehme eine Zahl A mit

$$A > l_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{7}$$

und betrachte die Zahlen

$$\begin{aligned}
L_\mu &= l_\mu(\lambda_\mu - \lambda_{\mu-1}) - A(\lambda_\mu - \lambda_{\mu-1}),\\
L_{\mu+1} &= l_\mu(\lambda_\mu - \lambda_{\mu-1}) + l_{\mu+1}(\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu) - A(\lambda_{\mu+1} - \lambda_{\mu-1}),\\
L_{\mu+2} &= l_\mu(\lambda_\mu - \lambda_{\mu-1}) + l_{\mu+1}(\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu) + l_{\mu+2}(\lambda_{\mu+2} - \lambda_{\mu+1}) - A(\lambda_{\mu+2} - \lambda_{\mu-1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L_n &= l_\mu(\lambda_\mu - \lambda_{\mu-1}) + \ldots + l_n(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - A(\lambda_n - \lambda_{\mu-1}).
\end{aligned}$$

Da $l_n > A$ ist für jedes n von einer gewissen Stelle an, so ist zuletzt die Folge der L_n eine monoton steigende. Sie besitzt also ein Minimum, also gibt es ein L_ν mit $\nu \geqq \mu$, so daß

$$L_\nu \leqq L_n \qquad (n = \mu, \mu+1, \mu+2, \ldots).$$

Es ist daher

$$\begin{aligned}
L_{\nu+p} - L_\nu &= l_{\nu+1}(\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) + \ldots + l_{\nu+p}(\lambda_{\nu+p} - \lambda_{\nu+p-1})\\
&\quad - A(\lambda_{\nu+p} - \lambda_\nu) \geqq 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)
\end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{gathered}
L_\nu - L_n = l_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) + \ldots + l_\nu(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) - A(\lambda_\nu - \lambda_n) \leqq 0\\
(\nu \geqq n \geqq \mu).
\end{gathered}$$

Addiert man zu

$$l_{\mu+1}(\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu) + \ldots - l_\nu(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \leqq A(\lambda_\nu - \lambda_u)$$

die, wegen (7), richtige Ungleichung

$$l_{\varkappa+1}(\lambda_{\varkappa+1} - \lambda_\varkappa) + \ldots + l_\mu(\lambda_\mu - \lambda_{\mu-1}) \leqq A(\lambda_\mu - \lambda_\varkappa) \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1),$$

so bekommt man hieraus zusammen mit (8) die gewünschten Ungleichungen.

Man beachte, daß nach diesen Ungleichungen die Zahl A aus dem Intervalle $l_\nu \leqq A \leqq l_{\nu+1}$ ist.

4. Ich führe eine monoton steigende Folge S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ein mit endlichem $\lim\limits_{n=\infty} S_n = S$. Es sei

$$\sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_n \to \infty$$

die vorhin genannte Sprungstellenfolge. Dann ist für die Folge $l_n = \sigma_n - S_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\lim_{n=\infty} l_n = -\infty.$$

---

[5]) Vgl. G. Pólya, loc. cit. S. 314.

Ziehen wir die λ-Folge unserer Reihe heran, so ergibt Hilfssatz 1, daß es unendlich viele ν gibt, so daß man ein σ bestimmen kann mit $\sigma_\nu \leqq \sigma \leqq \sigma_{\nu+1}$ derart, daß das A des Hilfssatzes in der Form $\sigma - S_\nu$ erscheint und folglich dann für $n = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$

$$(9) \quad \sigma(\lambda_\nu - \lambda_n) - \sum_{\varkappa=n+1}^{\nu} \sigma_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) \geqq S_\nu(\lambda_\nu - \lambda_n) - \sum_{\varkappa=n+1}^{\nu} S_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1})$$

und für $n = \nu + 1, \nu + 2, \ldots$

$$(10) \quad \sigma(\lambda_n - \lambda_\nu) - \sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} \sigma_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) \leqq S_\nu(\lambda_n - \lambda_\nu) - \sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} S_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}).$$

Ich bemerke gleich, daß

$$(11) \qquad S_n = \sum_{r=1}^{n} r^{-\alpha}$$

ist, wo $1 < \alpha < 1 + \frac{1}{c}$, c die feste Zahl aus (2) ist, und es wird später über α genauer verfügt werden, indem es ziemlich nahe an 1 liegen wird.

Hilfssatz 2. *Es gilt für alle genügend großen ν, die die Ungleichung (9) mit $n = 0$ erfüllen, und für unser σ aus $\sigma_\nu \leqq \sigma \leqq \sigma_{\nu+1}$ die Ungleichung*

$$\log m(\sigma) > C_1 \nu^{\frac{1}{c} - \alpha + 1},$$

wo c und α feste Zahlen aus (2) und (11) sind und C_1 eine geeignete Konstante.

Beweis. Es ist nach (4) für jedes ν und $\sigma_\nu \leqq \sigma \leqq \sigma_{\nu+1}$

$$\log m(\sigma) = \log m(\sigma_1) + \lambda_\nu \sigma - \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \sigma_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}),$$

und nach (9) gibt es beliebig große ν, so daß

$$\lambda_\nu \sigma - \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \sigma_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) \geqq S_\nu \lambda_\nu - \sum_{\varkappa=1}^{\nu} S_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1})$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \lambda_\varkappa(S_{\varkappa+1} - S_\varkappa) = \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \lambda_\varkappa(\varkappa+1)^{-\alpha} > C_2 \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} (\varkappa+1)^{\frac{1}{c} - \alpha},$$

weil es wegen (2) eine Konstante C_2 gibt, so daß

$$\lambda_\varkappa > C_2(\varkappa+1)^{\frac{1}{c}}.$$

Und somit für genügend große ν

$$\log m(\sigma) > C_1 \nu^{\frac{1}{c} - \alpha + 1}.$$

5. Zur Abschätzung von $\mu(\sigma)$ übergehend, spalten wir von der zweiten Summe in (6) für $\nu > 0$

$$\sum_{n=2\nu}^{\infty} e^{-\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} \sigma_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) + \sigma(\lambda_n - \lambda_\nu)}$$

ab, und wegen (10) ist wegen $n \geqq 2\nu$ und (3) für große ν der Exponent

$$\leqq S_\nu(\lambda_n - \lambda_\nu) - \sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} S_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1})$$

$$= -\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n}(S_\varkappa - S_{\varkappa-1})(\lambda_n - \lambda_{\varkappa-1}) = -\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n}\varkappa^{-\alpha}(\lambda_n - \lambda_{\varkappa-1}) \leqq -n^{-\alpha}\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n}(\lambda_n - \lambda_{\varkappa-1})$$

$$\leqq -n^{-\alpha}\frac{(n-\nu+1)(n-\nu)}{2}\Delta_n \leqq -\frac{\Delta_n}{8}n^{2-\alpha} < -\sqrt{n},$$

falls $\alpha < 1{,}5$ angenommen wird. Unsere Teilsumme strebt also mit $\nu \to \infty$ gegen 0 mindestens wie die Summe

$$\sum_{n=2\nu}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}.$$

Von den zwei übrigen Teilsummen ist, wegen (9),

$$\sum_{n=1}^{\nu-1} e^{\sum_{\varkappa=n+1}^{\nu}\sigma_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) - \sigma(\lambda_\nu - \lambda_n)} \leqq \sum_{n=1}^{\nu-1} e^{S_\nu(\lambda_n - \lambda_\nu) + \sum_{\varkappa=n+1}^{\nu} S_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1})}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\nu-2} e^{-\sum_{\varkappa=n+1}^{\nu-1}(S_{\varkappa+1} - S_\varkappa)(\lambda_\varkappa - \lambda_n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\nu-2} e^{-\sum_{\varkappa=n+1}^{\nu-1}(\varkappa+1)^{-\alpha}(\lambda_\varkappa - \lambda_n)}$$

$$\leqq 1 + \sum_{n=1}^{\nu-2} e^{-(2\nu)^{-\alpha}\sum_{\varkappa=n+1}^{\nu-1}(\lambda_\varkappa - \lambda_n)} = 1 + \sum_{l=1}^{\nu-2} e^{-(2\nu)^{-\alpha}\sum_{\varkappa=1}^{l}(\lambda_{\nu-\varkappa} - \lambda_{\nu-l-1})}$$

$$\leqq 1 + \sum_{l=1}^{\nu-2} e^{-(2\nu)^{-\alpha}\frac{\Delta_\nu}{2}l^2}.$$

Und ebenso ist, wegen (10),

$$\sum_{n=\nu+1}^{2\nu-1} e^{-\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n}\sigma_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa-1}) + \sigma(\lambda_n - \lambda_\nu)} \leqq \sum_{n=\nu+1}^{2\nu-1} e^{-\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n}\varkappa^{-\alpha}(\lambda_n - \lambda_{\varkappa-1})} \leqq \sum_{n=\nu+1}^{2\nu-1} e^{-(2\nu)^{-\alpha}\sum_{\varkappa=\nu+1}^{n}(\lambda_n - \lambda_{\varkappa-1})}$$

$$= \sum_{l=1}^{\nu-1} e^{-(2\nu)^{-\alpha}\sum_{\varkappa=1}^{l}(\lambda_{\nu+l} - \lambda_{\nu+\varkappa-1})} \leqq \sum_{l=1}^{\nu-1} e^{-(2\nu)^{-\alpha}\frac{\Delta_\nu}{2}l^2}$$

Beide Teilsummen zusammen sind also

$$\leqq 1 + 2\sum_{l=1}^{\infty} e^{-(2\nu)^{-\alpha}\frac{\Delta_\nu}{2}l^2} < 1 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\nu)^{-\alpha}\frac{\Delta_\nu}{2}x^2}\,dx = 1 + \sqrt{2^{1+\alpha}\pi\frac{1}{\Delta_\nu}}\,\nu^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Also ist wegen (3) mit einem größeren aber beliebig nahe an α liegenden α_1, bei genügend großem ν

$$\mu(\sigma) < \nu^{\frac{\alpha_1}{2}}. \tag{12}$$

Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so sei $\alpha_1 = \alpha + \eta$ (mit $2\varepsilon - c\eta > 0$). Ist α so nahe an 1 gewählt worden, daß

$$\alpha < 1 + \frac{2\varepsilon - c\eta}{c(1+c+2\varepsilon)},$$

so ist

$$\frac{\alpha_1}{2} < \left(\frac{c}{2} + \varepsilon\right)\left(\frac{1}{c} - \alpha + 1\right).$$

Aus Hilfssatz 2 und (12) folgt dann bei genügend großem ν (trotz des C_1), w. z. b. w.

Jerusalem, The Hebrew University, Institute of Mathematics, den 8. April 1929.

(Eingegangen am 18. Mai 1929.)

INGENIEUR-ARCHIV

Unter redaktioneller Mitwirkung von Prof. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr.-Ing. **A. Hertwig,** Berlin, Prof. **K. v. Sanden,** Karlsruhe.

Herausgegeben von Prof. Dr. Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart.

Zur Ermöglichung raschester Veröffentlichung erscheint das Archiv zwanglos nach Maßgabe der vorliegenden Arbeiten in einzeln berechneten Heften von 100 bis 120 Seiten Umfang. — Jährlich erscheinen 5 bis 6 Hefte.

Zur Einführung. Die neue Zeitschrift wird ihre Hauptaufgabe darin erblicken, die Beziehungen zwischen der wissenschaftlichen Forschung und der technischen Praxis zu pflegen, insbesondere zwischen der Mechanik (einschließlich Hydro- und Elastomechanik) und Thermodynamik einerseits und dem Maschinen- und Bauingenieurwesen andererseits. Die Beziehungen zwischen Wissenschaft und Technik sind durchaus wechselseitig: beide sind gebend, beide empfangend. Wenn Wissenschaft eine Voraussetzung der Technik, und Technik eine Anwendung der Wissenschaft ist, so ist doch auch Technik immer wieder eine Anregerin der Wissenschaft, und Wissenschaft eine Nutznießerin der Technik gewesen. Der Grund für diese Wechselwirkung liegt wohl darin, daß Wissenschaft eine Ökonomie des Erkennens und Denkens, Technik eine Ökonomie des Gestaltens und Kräftegebrauchs vorstellt. Diese Ökonomie gegenseitig nutzbar zu machen, ist ganz natürlich. Die Freundschaft jedoch, die so zwischen Technik und Wissenschaft bestehen sollte, ist nicht immer ungetrübt. Vielfach herrscht zwischen beiden ein Mißtrauen, das teils oberflächliche, teils aber auch tiefere Ursachen hat. Diese beseitigen zu helfen, wird ein wesentliches Arbeitsziel der neuen Zeitschrift sein.

Soeben erschien:

I. Band / 1. Heft

122 Seiten. Mit 41 Abbildungen. RM 9.60

Inhalt: Zur Einführung. / Über Schwungräder mit radial beweglichen Massen. Von R. Grammel in Stuttgart. / Beitrag zur Theorie des Massenausgleichs von Sternmotoren. Von P. Riekert in Ludwigshafen. / Über die Festigkeit von Kreiszylinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Von K. Miesel in Eberswalde. / Über die unsymmetrische Biegung dünner Kreisringplatten. Von H. Reißner in Berlin-Charlottenburg. / Die kritischen Drehzahlen der fliegenden Welle mit Längsbelastung und Kreiselwirkung. Von K. Karas in Brünn. / Die unstetige Strömung um einen Kreiszylinder. Von C. Schmieden in Danzig-Langfuhr. / Neue Konstruktionen der räumlichen graphischen Statik. Von R. Mehmke in Stuttgart. / Die Spannungsverteilung in einem Schachtpfropfen. Von O. Domke in Aachen.

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Villat, H., Leçons sur la théorie des tourbillons. 8°. 294 S. Paris, Gauthier-Villars et Cie., 1930.

B. Petronievics, N. Lobatschewsky et **J. Bolyai, étude comparative d'un cas spécial d'inventeurs simultanés, Revue philisophique de la France et de l'étranger. Dirigée par L. Lévy-Bruhl.** 8°. 25 S. Librairie Félix Alcan, Paris. (Sonderabdruck.)

Bieberbach, L., Analytische Geometrie. Mit 39 Figuren im Text. Kl. 8°. IV u. 120 S. Teubners Mathematische Leitfäden, Band 29. Leipzig und Berlin, 1930.

Janet, M., Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. 8°. VIII u. 122 S. Paris, Gauthier-Villars et Cie., 1929.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. 110. Jahresversammlung vom 29. August bis 1. September 1929 in Davos. 8°. 144, 236 u. 44 S. Kommissionsverlag H. R. Sauerländer & Cie., Aarau, 1929.

Recueil Mathématique de la société mathématique de Moscou. Band XXXVI, Erste Lieferung. Gr. 8°. 80 S. Moskau, 1929.

Erreth, A., Die Aberration und die Geschwindigkeit des Lichtstrahls. Übersetzung aus dem Ungarischen. 8°. 48 S. Budapest, 1929.

Hierzu zwei Beilagen vom Verlag Julius Springer in Berlin.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.